

Indice

Prefazione	1
Introduzione	3
1 Tutto il corso, o quasi, in un capitolo	21
1.1 I modelli dello spazio	21
1.2 Una parentesi sulle strutture algebriche	24
1.3 Gli spazi vettoriali: perché?	26
1.4 La dimensione di uno spazio vettoriale	29
1.5 Topologia e Calcolo Differenziale	32
1.6 Il programma	32
1.7 Esercizi	35
2 Imparare giocando: preliminari e prerequisiti	37
2.1 Insiemi	37
2.2 Insiemi da insiemi	39
2.3 Chi sa cos'è una funzione?	41
2.4 Relazioni su un insieme.	45
2.5 L'anello degli interi.	46
2.6 Campi	47
2.7 Esercizi	49
3 Spazi di colonne di numeri reali	51
3.1 Anteprima	51
3.2 Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$	52
3.3 La base canonica di $\mathbb{R}^n$	53
3.4 Spazi di combinazioni lineari. Direzioni	54
3.5 Il prodotto scalare	55
3.6 Il modulo di un vettore	57
3.7 Proiezioni ortogonali	61
3.8 Esercizi	65

4	Lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale	69
4.1	Ricordiamo che...	69
4.2	Determinanti di coppie di vettori	70
4.3	Sistemi lineari di due equazioni in due incognite.	72
4.4	Collinearità e complanarità in $\mathbb{R}^3$	73
4.5	Determinanti di terne di vettori	76
4.6	La regola di Cramer per i sistemi 3×3	78
4.7	Il prodotto vettoriale	79
4.8	Esercizi	84
5	Il modello dello spazio fisico (euclideo)	89
5.1	Lo spazio affine n-dimensionale.	90
5.2	Segmenti e triangoli.	92
5.3	Riferimenti Affini	94
5.4	Un cenno sulle coordinate polari e sferiche.	96
5.5	Esercizi	98
6	Elementi di Geometria Analitica	99
6.1	Rette e piani affini in $\mathcal{E}^n$	99
6.2	Rette parallele, ortogonali, incidenti	100
6.3	Piani affini	100
6.4	Assi, mediane e altezze di un triangolo	101
6.5	Palle aperte, chiuse, e sfere dello spazio affine	104
6.6	Equazioni parametriche e cartesiane della retta e del piano affine	104
6.7	Spazi affini reali di dimensione 1, 2, 3	107
6.8	Piani e rette nello spazio affine tridimensionale	109
6.9	Distanze.	115
6.10	Sfere e Circonferenze	119
6.11	Esercizi	125
7	Spazi Vettoriali (di funzioni)	129
7.1	Introduzione	129
7.2	Spazi vettoriali di Campi Scalari	130
7.3	Esempi di Spazi Vettoriali	134
7.4	Sottospazi Vettoriali.	135
7.5	(Sotto)spazi vettoriali finitamente generati	138
7.6	Basi e dimensione	144
7.7	“Operazioni” con i sottospazi	148
7.8	Esercizi	154
8	Matrici	157
8.1	Informalmente	157
8.2	Prime definizioni formali	159
8.3	Trasposta di una matrice	164
8.4	Spazi Vettoriali di matrici	165
8.5	Trasposizione e coniugio	166
8.6	Prodotto di matrici	168
8.7	Bilinearità e associatività del prodotto di matrici	172

8.8	Matrici Quadrate	176
8.9	Il gruppo lineare delle matrici invertibili	178
8.10	Matrici simmetriche e antisimmetriche	180
8.11	Rango, matrici ridotte e riduzione	182
8.12	Matrici elementari e riduzione	187
8.13	Cenni sull'inversa di una matrice quadrata.	191
8.14	Esercizi.	194
9	Applicazioni Lineari	199
9.1	Applicazioni Lineari	199
9.2	Lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari	202
9.3	Isomorfismi	204
9.4	Nucleo e immagine di un'applicazione lineare	205
9.5	Matrici di cambiamenti di base	210
9.6	Matrici associate ad applicazioni lineari.	211
9.7	Matrici associate ad endomorfismi.	217
9.8	Sistemi lineari.	218
9.9	Esercizi	222
10	Determinanti	229
10.1	Permutazioni	229
10.2	Funzioni alternanti e forme multilineari	231
10.3	Forme Multilineari e Alternanti. Determinante.	233
10.4	Determinante di una Matrice Quadrata	237
10.5	Regola di Laplace per il calcolo dei determinanti	239
10.6	La matrice aggiunta e l' inversa di una matrice quadrata	242
10.7	Sistemi di Cramer	244
10.8	Esercizi.	246
11	Autovalori e Autovettori	249
11.1	Ricordiamo che...	249
11.2	Matrici simili e diagonalizzabili	250
11.3	Autovalori e autovettori di un endomorfismo	253
11.4	Determinazione di autovalori e autovettori	254
11.5	Endomorfismi semplici e matrici diagonalizzabili	256
11.6	Esercizi	259
12	Matrici Simmetriche e Ortogonali	263
12.1	Matrici Ortogonali Reali	263
12.2	Il gruppo $O(3)$ e $SO(3)$.	266
12.3	Matrici Hermitiane	269
12.4	Matrici simmetriche e endomorfismi autoaggiunti	273
12.5	Matrici Simmetriche Reali e Congruenza	275
12.6	Forme bilineari	279
12.7	Forme quadratiche reali e loro classificazione	283
12.8	Un intermezzo: la Decomposizione ai Valori Singolari (SVD)	283
12.9	Esercizi	287

13 Elementi di Topologia degli spazi metrici	289
13.1 Spazi euclidei, unitari e normati	289
13.2 Spazi metrici	291
13.3 Topologia delle palle aperte	292
13.4 Insiemi chiusi	295
13.5 Proprietà di separazione	297
13.6 Limiti e Continuità	299
13.7 Riconoscere funzioni continue notevoli.	303
13.8 Esercizi	304
14 Elementi di calcolo differenziale in più variabili	307
14.1 Preliminari	307
14.2 Differenziabilità di campi scalari	308
14.3 Alcune proprietà delle funzioni differenziabili.	315
14.4 Differenziale di campi vettoriali.	316
14.5 Gradiente, campi conservativi	320
14.6 Formula di Taylor per le funzioni reali di più variabili reali	322
14.7 Il caso delle funzioni di due variabili.	326
14.8 Esercizi	327
15 Elementi di Geometria Differenziale	333
15.1 Curve parametrizzate	333
15.2 Integrale di linea e curvilineo	340
15.3 Superficie differenziabili regolari	341
15.4 Ipersuperficie di livello e gradiente.	343
15.5 Esercizi	345
16 Complementi vari di Geometria	349
16.1 Cambiamenti di riferimenti affini	349
16.2 Rototraslazioni nel piano	352
16.3 Rotazioni e traslazioni in $\mathcal{E}^3$	353
16.4 Una divagazione culturale: le trasformazioni di Lorentz	354
16.5 Luoghi di zeri di polinomi.	355
16.6 Superficie di rotazione nello spazio tridimensionale	358
16.7 Esercizi	361
17 Cenni sulle coniche	365
17.1 Un'introduzione generale	365
17.2 Definizione metrica delle coniche.	366
17.3 Prime definizioni	366
17.4 Classificazione delle Coniche.	369
17.5 Esercizi	377
18 Cenni sulle Quadriche	379
18.1 Generalità	379
18.2 Classificazione delle quadriche.	383
18.3 Quadriche in forma canonica	385
18.4 Come mettere una quadrica in forma canonica?	386

18.5	Forma canonica delle quadriche non degeneri.....	387
18.6	Quadriche di rotazione.....	389
18.7	Esercizi	390
	Bibliografia	393
	Indice analitico	395