

## Introduzione

**Avvertenza.** *Quella che segue è praticamente la stessa introduzione della prima edizione che, riportata tale e quale nella seconda, è qui riproposta nella terza in forma adattata per accompagnare l'attuale congiuntura didattica. Per l'originale, come sempre, consultare*

[http://calvino.polito.it/~gatto/public/LALG/LALG\\_anteprema.htm](http://calvino.polito.it/~gatto/public/LALG/LALG_anteprema.htm).

**Sugli scopi.** L'obiettivo minimo della prima edizione del presente testo era quello di fungere da supporto alle lezioni in aula di un primo corso di *Algebra Lineare e Geometria*. Era pensato, essenzialmente ma non solo, per gli studenti che frequentavano o avrebbero frequentato le lezioni del primo anno di ingegneria, specialmente, ma non solo, per quelli iscritti al Politecnico di Torino, in particolare, ma non solo, per quelli che seguivano o avrebbero seguito <sup>3</sup> i corsi dell'Autore, per i quali il libro era stato specialmente pensato e scritto.

Per dire la verità, più che di un libro, si trattava di una raccolta di appunti, certamente incompleta, di lezioni che l'Autore aveva tenuto a partire dall'Anno Accademico 2004/2005 fino a circa al 2011, epoca della Prima Edizione. Un breve arco di tempo, certo, durante il quale però ci si è dovuti cimentare col problema non banale di conciliare, non solo al Politecnico e non solo a Torino, l'insegnamento di un programma impegnativo, che non ha mai subito sostanziali snellimenti, con una radicale riduzione delle ore di lezione in aula.

Il tentativo di misurarsi con questa sfida entusiasmante era stata, ad un tempo, spirito e motivo fondante della redazione di questi appunti, raccolti non tanto per colleghi matematici, che troppo facilmente avrebbero trovato difetti qua e là, ma, soprattutto, per quel bacino di utenza che aveva seguito o avrebbe seguito le lezioni dell'Autore, del cui stile personale, forse discutibile epperò inevitabile, inevitabilmente il testo risentiva ieri, come oggi ancora ne risente. Già allora era facile prevedere che miglioramenti si sarebbero imposti, se non cambiamenti radicali, a mano a mano che la maggiore esperienza acquisita avrebbe dipinto quella di allora coi colori tenui dell'ingenuità.

---

<sup>3</sup> O hanno già seguito...

In questa edizione, così come nella prima, gli sforzi maggiori sono stati orientati, con quanto e quale successo sarà il lettore a deciderlo, nel tentativo di fabbricare un prodotto che potesse essere, ad un tempo, *utile*, *formativo* e *ricreativo*. *Utile*, muovendo dalla consapevolezza che il tipico studente di ingegneria, di norma non animato da velleità matematiche, non è necessariamente incline alla speculazione teorica ma ha tuttavia esigenza di arricchire di nuovi efficaci utensili la cassetta degli attrezzi cui dovrà spesso ricorrere nella sua futura vita professionale. Di qui la vera sfida del testo: convincere lo studente pagante<sup>4</sup> che la Geometria “serve” concretamente, un obiettivo certamente non incompatibile con la personale simpatia dell’Autore per il nobile sdegno euclideo<sup>5</sup>. Parimenti, il testo vorrebbe essere *formativo* ambendo, di fatto, non solo all’insegnamento di tecniche e strumenti, ma anche a svelare i segreti e i principi che ne reggono il funzionamento, proponendo modelli di vita fondati sull’abitudine a pensare e sullo stimolo dell’immaginazione, favorendo l’invenzione di quelle soluzioni novelle indispensabili per misurarsi con le sfide cangianti della Scienza Applicata.

Infine, ma non da ultimo, il testo tenterà di essere *ricreativo*. Non solo grazie alla bravissima *Darinka*, la cui matita ha commentato varie parti del testo senza rinunciare a quella punta di fine e ironico scetticismo antimatematico a cui tanti, incluso il sottoscritto, guardano ancora con innegabile simpatia, ma anche attraverso una presentazione della materia che rincorra la provocazione intellettuale, stanandone gli aspetti più intriganti spesso celati dietro i bastioni di un formalismo sobrio e austero eretti, tuttavia, non per occultare le verità ai semplici o ai sapienti, bensì a difesa degli assalti delle false credenze e dei tranelli dell’intuizione.

D’altra parte, mi verrebbe da chiedere ai miei ragazzi, quale sarebbe il gusto di studiare se non ci si divertisse? E, parola di gatto<sup>6</sup>, non c’è nulla di più divertente del gioco della Matematica<sup>7</sup>, purché si sappia nutrire con sapienza la pazienza necessaria per impararne le regole. Infine, anche se non ci fosse riuscito o lo fosse solo in parte, per trasmettere la gioia di far matematica, invitare a studiarla e viverla col piacere della ricerca costante della bellezza e dell’eleganza, liberi da ingiustificate ansie da prestazione, l’Autore sì, ce l’ha messa davvero tutta.



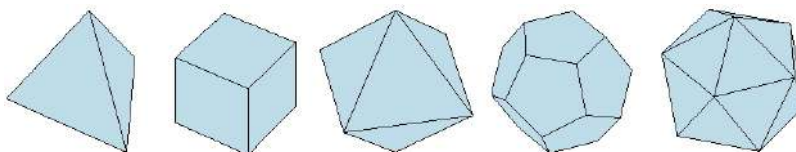
<sup>4</sup> Perché il libro lo avete comprato, vero?

<sup>5</sup> Proclo racconta che uno studente domandò a Euclide a cosa servisse la Geometria. Il grande Geomètra (cf. Dante, Inf. IV, 142) invece di rispondergli chiamò uno schiavo ordinandogli “Dà a quest’uomo alcune monete. Egli studia infatti per trarne profitto”.

<sup>6</sup> O di Gatto?

<sup>7</sup> Scriveva Vincenz Erath, in un ormai introvabile *Das Blinde Spiel*, del 1954: “Dio è un fanciullo e quando cominciò a giocare diede vita alla Matematica: essa è infatti il gioco più divino che vi sia fra gli uomini”.

**Non entri chi non conosce la Geometria** non è un consiglio a rimanere fuori dall’Aula, dove invece ciascuno è invitato a sedere, ascoltare e partecipare, bensì l’iscrizione posta sull’Accademia di Platone<sup>8</sup>, che certifica l’influenza determinante della disciplina geometrica nel disegnare il profilo del pensiero filosofico fin dalle civiltà più antiche.



- I cinque solidi platonici:  
tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro -

Se si ardisse pensare alla Matematica come ad un grande albero, la Geometria ne sarebbe certamente radice e linfa vitale, in grado di raggiungere e nutrire financo i rami più lontani ed esili. La Geometria, così come è stata a noi tramandata non solo dagli agrimensori sumeri (di circa cinquemila anni fa), o dagli ingegneri e architetti egiziani, che intuirono l’essenziale bellezza della piramide (non a caso il tetraedro è il primo dei *solidi platonici*, Cf. Timeo [17]), ma soprattutto dagli antichi greci della *Scuola Euclidea*, costituisce la prima manifestazione documentata e documentabile della comparsa del pensiero matematico nella storia dell’Umanità. Nata con la presunzione di fungere da strumento d’indagine delle proprietà delle figure dello spazio, si manifestò fin dai primissimi albori quale corpus di proposizioni la cui *verità fisica*, più che matematica, doveva essere certificata da dimostrazioni. Se non fosse stata la verità il reale obiettivo delle proposizioni di Euclide<sup>9</sup>, questo venerabile padre della geometria non sarebbe mai stato turbato, come invece con certezza fu, dalla necessità di includere nel sistema assiomatico degli “Elementi” il Postulato V delle parallele, irriducibile al più umile ma anche più rassicurante ruolo di *verità di per sé evidente*.



- Euclide (un matematico con turbante) -

<sup>8</sup> Platone, filosofo Ateniese vissuto tra il 428 e il 347 avanti Cristo, autore di molti dialoghi pregni di suggestioni e influenze provenienti dalle conoscenze geometriche della sua epoca.

<sup>9</sup> Euclide, greco. Il più grande matematico dell’antichità e, senz’ombra di dubbio, tra i più grandi dell’Umanità, visse tra il 323 a.C. e il 285 a.C. Con gli Elementi e le ricerche sul postulato delle parallele fu, in pratica, antesignano delle stesse geometrie cosiddette *non euclidee*. Si veda per esempio [2].

La visione della Geometria quale parte della fisica è qualcosa che permea persino il pensiero di vari matematici contemporanei: valga per tutti l'autorevole esempio dell'illustre Vladimir I. Arnold<sup>10</sup>, secondo il quale tutta la Matematica, e non solo la Geometria, è una branca della fisica, quella in cui gli esperimenti costano poco [3]. Una chiave di lettura, d'altronde, già ben presente nel pensiero del grande Galileo Galilei,<sup>11</sup> le cui parole, già indelebilmente impresse nella memoria di ciascuno di noi, si citerebbero qui inutilmente se non per tributare un ennesimo riconoscimento alla sua statura scientifica:

*“La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l’universo), ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto [11, pp. 631–632].”*

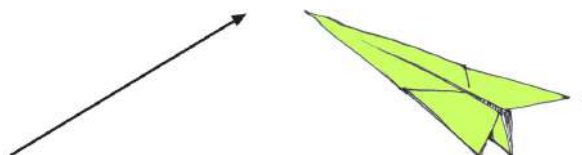
Non però che or si voglia, noi stessi, Autore e Lettore, smarrire la bussola nel labirinto altrettanto oscuro di divagazioni storico-filosofiche a buon mercato, lungi dalla sana pratica della vita ingegneristica, pane al pane, vino al vino, e diciamocela in soldoni, purché si capisca, ché anche questa è, in fondo, filosofia. Difficile ignorare, però, che persino il celebre *teorema di Pitagora* si impone quale nobile esempio di legge fisica con applicazione ingegneristica. Il fatto che il lato più lungo, *l'ipotenusa*, di una recinzione con pianta a forma di triangolo rettangolo, abbia quadrato uguale alla somma dei quadrati dei due lati minori, i cosiddetti *cateti*, è certamente una disposizione della Natura, almeno nel senso genuinamente sperimentale galileiano, secondo il quale una legge fisica altro non è che una relazione tra misure. Viceversa, se si volesse costruire un palazzo, con pianta a forma di triangolo rettangolo, basterebbe utilizzare tre regoli rigidi, di lunghezze  $a, b, c$ , tali che  $a^2 + b^2 = c^2$ , e disporli sul terreno in modo da formare un triangolo avente per lati i tre regoli: l'angolo retto, quello tra il lato di lunghezza  $a$  e quello di lunghezza  $b$ , sarebbe garantito dal teorema di Pitagora, che si presta così ad una evidente applicazione architettonico-ingegneristica. Un po' fuori moda, forse? Forse. Intanto però c'è voluto l'avvento dei satelliti artificiali o dei dispositivi elettronici capaci di elaborare mappe del terreno. E ciò grazie anche alla Geometria. Il Gatto si morde la coda. Nulla si crea e nulla si distrugge.

**Studiare lo "Spazio Fisico".** Comunque la si veda, la Geometria anela per suo lignaggio ad essere la via regia per l'ideazione e progettazione di modelli matematici dello *spazio fisico*. Di qui la scelta didattica di presentare la materia attraverso una raffigurazione quasi drammatica di un universo dinamico, che pullula di *punti* e *luoghi di punti* che possono essere “spostati” adoperando vettori applicati e “girati” per mezzo di rotazioni. Una storia in parte nota, già raccontata nei primi corsi di fisica, fin dagli anni della scuola secondaria, dove cruciale è la nozione di *vettore applicato*. Applicato

<sup>10</sup> Vladimir Igorevic Arnol'd, Odessa 12 Giugno 1937 – Parigi 3 Giugno 2010. Grande matematico russo che ha offerto contributi fondamentali alla teoria dei sistemi dinamici.

<sup>11</sup> Galileo Galilei, il padre del metodo sperimentale, matematico e astronomo. Galileo nasce a Pisa il 15 febbraio 1564 e si spegne ad Arcetri, l'8 gennaio del 1642, lo stesso anno in cui nacque Isaac Newton (1642–1727), al quale passò la staffetta della rivoluzione scientifica che cominciò a correre da solo.

a cosa? Applicato ad un punto. E il punto cos'è? Cosa sono le sue coordinate? Cos'è un vettore o un sistema di riferimento?



Cosa si intende per vettore?

Il volersi muovere con tutta la libertà di chi conosce un territorio palmo a palmo senza il pericolo di smarrirsi, impone l'elaborazione di un modello astratto ma flessibile, economico ma potente, in grado di chiarire una volta per tutte, grazie anche alla sua sbalorditiva eleganza, quelle nozioni senza cui nessuna seria indagine dello spazio fisico sarebbe possibile. Le stesse regole che presiedono al funzionamento del modello saranno passibili, in ragione della propria flessibilità, non solo di essere utilizzate e riutilizzate, ma anche di essere re-inventate con fantasia e creatività, con tutta la sicurezza necessaria a chi, nella ricerca di nuove applicazioni, non può permettersi di avventurarsi lungo sentieri sdrucchiolevoli.

**La struttura.** Dopo tante chiacchiere, molte certamente a vanvera, è forse opportuno offrire qualche cenno in più sulla struttura del testo. Si è cercato di redigerlo, innanzitutto, in una forma tale da consentire all'ipotetico lettore di ritagliarsi un itinerario personalizzato. Tale modo di scrivere è soggetto a delle ovvie controindicazioni, come quella di non poter sempre presentare gli argomenti nella successione più economica ed elegante possibile, in accordo con i canoni ufficiali dell'esposizione matematica. Nella prima e seconda edizione, la materia era anticipata da un supplemento di chiacchiere introduttive, oggi soppresso, ma che il lettore interessato può ancora godersi all'URL

<http://calvino.polito.it/gatto/public/LALG/tuttoIIed.pdf>

che era mirato a (ri)svegliare l'entusiasmo per la Geometria. L'Appendice A, un tempo Capitolo 2, è dedicata ad un veloce ripasso di prerequisiti. E' bene ricordare e ribadire, comunque, che questo testo è pensato più come supporto alle lezioni in aula che non come sostitutivo delle stesse.

**Sulle novità e sui difetti.** La terza persona dell'Autore mi concede la parola in questo paragrafo nel quale, con sua licenza, mi esprimerò in prima persona. La materia esposta negli appunti è la medesima di quella trattata in ottimi testi di Algebra Lineare e Geometria. Per esempio: quelli adottati nei passati anni accademici. Niente di nuovo sotto il Cielo. L'algebra lineare non è cambiata e non cambierà. Quel che può cambiare è lo stile dell'esposizione. Può cambiare l'interpretazione, ma la musica è sempre la stessa e, certamente, non c'è uno stile migliore di un altro, ognuno ha il proprio e qui c'è il mio.

Tra queste, per esempio, il tentativo di automatizzare il più possibile le manipolazioni con le matrici che, almeno per un aspirante ingegnere sono un po' più interessanti della applicazioni lineari astratte, identificandole a seconda della bisogna come righe di colonne o colonne di righe. Ciò sarà particolarmente utile perché le notazioni usate sono coerenti con quelle della sintassi di MATLAB®, con la quale il lettore dovrà imparare a cimentarsi. Questo semplice accorgimento ha consentito di trattare in modo snello e

flessibile quella parte di corso dedicata alle matrici per il cambiamento di base e quelle associate ad una applicazione lineare. Con il vantaggio di semplificare notevolmente molte dimostrazioni (ora illuminanti) in special modo quelle del capitolo dedicato agli autovalori e autovettori di una matrice quadrata, per il quale vale, come sempre, il prezioso ausilio di [12]. L'esposizione, per il resto, si differenzia da molte altre, già in circolazione e già collaudate, solo per la scelta degli esempi o per il modo di re-introdurre nozioni, che in linea di principio dovrebbero essere già note al lettore-studente, le quali riflettono il gusto e la formazione dell'Autore. Si veda, per fare un esempio davvero di base, la nozione di *angolo*, *seno* e *coseno* di un angolo, *coordinate polari e sferiche* (Cf. Sezione 4.4).

Quanto ai difetti, occorrerebbe scrivere, questa volta sì, un vero libro, per elencarli tutti. Alcuni sono dovuti alla limitatezza intrinseca dell'Autore, altri al fatto che lo stesso ha riordinato gli appunti nei ritagli di tempo e il tempo, nonostante i sette anni trascorsi dalla prima idea del progetto, e le continue promesse e rinvii di consegnarne una realizzazione in forma definitiva, è stato poco. Per dirla tutta, il libro l'ho finito di scrivere ieri, oggi l'ho consegnato e non ho avuto neppure il tempo di rileggerlo né, tanto meno di farlo leggere a colleghi che mi avrebbero beneficiato di utilissimi commenti e suggerimenti. Sarà pieno di errori si stampa. Per questo, in una visione *dinamica* e non statica del presente lavoro, all'ur1

<http://calvino.polito.it/~gatto/public/LALG/lezioniALG.htm>,

la *Pagina Casa del libro*, il lettore troverà un *link* ad una *errata corrige* che verrà aggiornata mano a mano, col pervenire delle segnalazioni. Visitatelo spesso. Sulla stessa web page aggiungerò anche tutti quegli esempi o esercizi che sicuramente mi accorgerò (e i lettori si accorgeranno) mancare, quando io stesso avrò in mano gli appunti già licenziati dai tipi della CLUT in forma di libro.



**Ringraziamenti.** Questo testo è il risultato di sofferte meditazioni, possibilmente valse a nulla, sul come riuscire ad insegnare un programma incredibilmente vasto in un tempo incredibilmente angusto, senza nulla togliere alla chiarezza e al rigore e senza omettere surrettiziamente parti di programma.

All'uopo mi sono state di fondamentale aiuto le conversazioni che ho avuto con molti amici e collaboratori, che hanno generosamente condiviso con me la propria sensibilità ed esperienza.

In primis, desidero ringraziare i colleghi che mi hanno aiutato tenendo le esercitazioni, caricandosi della parte forse più importante e impegnativa del corso, che è quella di *insegnare a fare*. Li voglio elencare tutti, in ordine alfabetico: si tratta di *Marco Abrate, il grande Antonio Aliano, Valeria Andriano, Stefano Barbero, Felice Davi, Francesco Ganci, Claudia Gasperi, Vincenza Rosa Lucaselli, Francesca Messina, Massimo Olivero, Cora Repetti, Andrea T, Ricolfi, Roberto Vai (in memoriam) e Mattia Venditti*. Il loro lavoro e il loro garbato contatto con gli studenti è stato per me di fondamentale aiuto, nonché i saggi consigli della mia amica Inna Scherbak. Un grazie speciale lo devo all'amico e collaboratore *Jorge Cordovez*, il quale ha spesso sacrificato parte del proprio tempo prestandomi soccorso anche in epoca di esami.

Ringrazio, per l'amichevole collaborazione che mi ha aiutato a migliorare il dosaggio e l'ordine di esposizione degli argomenti del corso, i docenti dei corsi paralleli di Fisica, i professori *Felice Iazzi, Guido Rizzi, Aurelia Stepanescu, Amelia Carolina Sparavigna e Alfredo Strigazzi*

Durante l'insegnamento ho continuato, per quanto possibile, a dedicarmi a varie attività più propriamente matematiche, ricerca, organizzazione e diffusione, in mezzo alle quali ho ritagliato gli scampoli di tempo necessari per completare questa raccolta di appunti. Tra quanti maggiormente mi hanno sostenuto in questa corsa ad ostacoli voglio ringraziare gli amici *Diego Parentela*, della *Gierre Servizi Tecnici* di Santena e *Fabio Favaro* con tutto lo staff della *Filters srl* di Scalenghe, in particolare *Licia e Valerio*.

Per il supporto ricevuto nell'organizzazione e nella diffusione di iniziative di natura matematica, anche riguardanti la promozione di questo testo, ringrazio il mio ex studente, *Vittorio Fidotta*, ma anche *Maria Paula Niño Buitrago, Ilenia Di Lecce, Matteo Gallina, Giulio Ravizza, Emilio Vitaliano*.

Un grazie, ancora, a *Darinka*, già illustratrice dell'*Introduzione Amichevole alla Forma Canonica di Jordan* [12], soprattutto per aver reinterpretato sulla copertina momenti della mia vita in aula e a *Giuseppe Ghibó e Vito Melchionda* per il prezioso ausilio informatico.

Un contributo essenziale per la stesura degli appunti è stato anche fornito da molti miei (ex) studenti, i quali hanno letto con attenzione e simpatia varie versioni preliminari del libro, segnalandomi errori di vario tipo. Tra coloro che ricordo, e spero di non dimenticarne troppi, *Marco Carcioffo, Celeste Del Basso, Andrea Caso, Chiara Denegri, Joel Eric Djeuto, Kevin Dietrich Dongue Dongue, Matteo Di Luca, Giulia Dragone, Giovana Felice, Rocco Fuso, El Mehdi El Gargati, Giacomo Gatto, Matteo Granata, Roberto Guarino, Ilenia Guarracino, Elisa Guelpa, Marta Guzzafame, Chiara Jansiti, Anissa Kapxhiu, Elena Ladisa, Francesca Landi, Viviane Lisboa, Giulia Lisco, Guido Lorenzi, Alberto Maldarella, Erica Manfredi, Giulia Massaglia, Andrea Mazza, Stefano Meinardi, Cindy Menegaldo, Paride Mesaglio Chittaro, Stefano Montesano, Leticia Monthe Nzuguem, Mandanà Moshiri, Neusa Natal, Nicola Paldo, Michele Perrotti, Michela Perrini, Daiana Piazza, Enrico Poncini...* e molti altri ancora i cui visi sono ben custoditi nella mia memoria che, però, ne ha lasciato evadere i nomi.

Desidero ringraziare anche, e qui non c'è spazio per elencarli tutti, gli studenti che, lungo l'avvicinarsi degli anni accademici, mi hanno incoraggiato e incitato a scrivere un libro del corso, tra i quali certamente *William De Coi, Abdelgani Errfig, Luca Di*

*Maggio, Federica Gamba, Sabrina Gonzatto, Sergio Lo Bue* e molti altri e mi scuso con chi, deluso, troverà questo prodotto inferiore alle proprie aspettative.

Doveroso, inoltre, oltreché un piacere, ringraziare *Donatella Toscano* e *Franco Marino* della CLUT, che hanno pazientemente atteso, negli ultimi tre-quattro anni, la consegna di una versione finale del manoscritto, ripetutamente promessa e ripetutamente rinviata, in cambio dell'assunzione di ulteriori nuovi impegni, quasi mai onorati.

Ringrazio infine mia moglie *Sheila* e i miei figli *Giuseppe* e *Giuliano*. Essi non solo si sono lasciati trascurare senza lamentarsi troppo ma, anzi, hanno saputo amplificare quel rumoroso ambiente di allegria che mi ha aiutato a sopportare la fatica, ancorché senza diminuirla.

*Questo lavoro è dedicato alla forza e alla dolcezza di mia madre Rosa e alla cara memoria di mio padre Giuseppe. Dal mirabile esempio di quest'ultimo, ma per me il primo, ho appreso la dedizione al lavoro e alla famiglia, nonché un'affettuosa simpatia per i miei simili. Tra i quali, è chiaro, tutti i miei studenti, passati, presenti e futuri che, con questa frase, possono considerarsi inclusi nella dedica.*

Torino, 14 Febbraio 2018

