

**D.** - *Una giovine dicea a Rousseau: “Giacomo, lascia le donne e studia la matematica”<sup>1</sup>*

**A.** - *Vuol dire che per me è il contrario. Lascio le matematiche e studio le donne.*

F. De Sanctis, “*Saggi Critici*”<sup>2</sup>

## Un’introduzione amichevole

Ciao. Sei uno studente o una studentessa di ingegneria che deve preparare la prova scritta e/o orale del corso di Geometria? O di un corso in cui Ti si chiederà di saper risolvere sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del prim’ordine (Analisi 1 e/o 2, Teoria Matematica dei Controlli, Calcolo Numerico o, anche, Metodi Matematici per l’Ingegneria)?

Allora, forse, questo libro fa per Te, poiché vorrebbe essere una guida su uno degli argomenti di Algebra Lineare che sembra ritenuto, sicuramente non a torto, tassello irrinunciabile della cultura matematica di un ingegnere.

Questa guida cerca, in primo luogo, di insegnarTi a trovare la Forma Canonica di Jordan (FCJ nel seguito) di una matrice quadrata a coefficienti nel campo dei numeri complessi e ad utilizzare tale procedura in alcuni casi interessanti per le applicazioni, come, per esempio, la soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

E’ un libro che ho scritto proprio per Te, studente, e non per colleghi matematici che già conoscono l’argomento e ai quali non potrei dar torto se osservassero che l’ordine degli argomenti non è il più logico possibile e non tutte le dimostrazioni sono le più eleganti e economiche. Tuttavia non si tratta di un’opera scientifica, bensì di un testo di servizio nel quale l’economia e l’eleganza, laddove erano alla portata dell’autore, sono state spesso sacrificate nella speranza di guadagnarne in chiarezza.

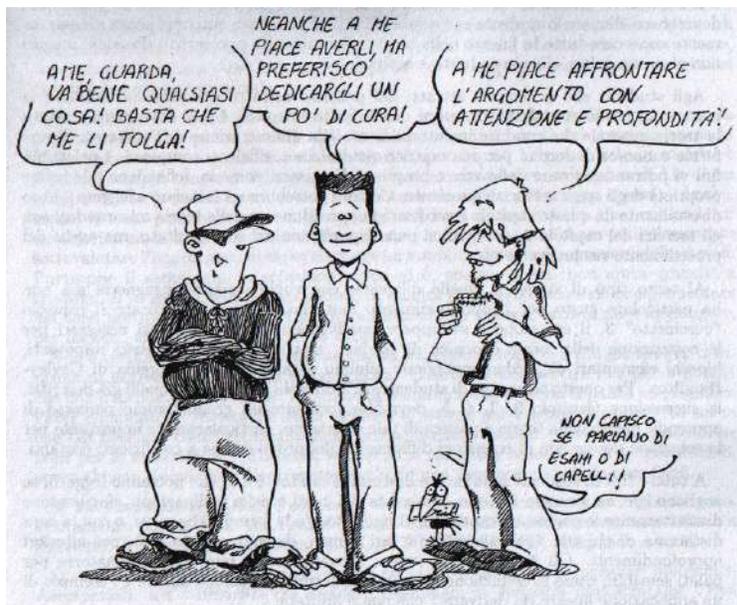
Non è un libro di Algebra Lineare e neppure di Analisi. Per queste materie già disponi di ottimi testi (come [8], [14] o [4]) e altri puoi trovarne nelle librerie. Questo libro non vuole, e non può - trattandosi di un testo a carattere monografico - sostituirli ma, semmai “conquistare nuovi spazi in nome dell’interdisciplinarietà. Argomento apparentemente marginale e circoscritto, la forma canonica di Jordan è, in questo libro, principalmente un pretesto attraverso il quale si tenta di cogliere l’unità delle discipline matematiche che gli studenti di Ingegneria sono spesso abituati a vedere distinte e reclusi entro gli angusti compartimenti stagni dei corsi e degli esami di profitto.

L’ordine con il quale si susseguono i vari capitoli del testo riflette ampiamente il mio tentativo di scriverlo per Te. Prendo atto di una realtà. Gli studenti non sono tutti uguali: ognuno ha i propri gusti, le proprie preferenze; non tutti gradiscono la stessa materia allo stesso modo e non tutti, naturalmente, hanno la stessa pazienza e la stessa voglia di trascorrere lo stesso tempo sui libri. Epperò tutti desiderano, per una ragione o per l’altra, superare gli esami di matematica. C’è chi vuol farlo molto bene. E’ il classico “impallinato per la Matematica.

<sup>1</sup>Confessioni, lib. VII).

<sup>2</sup>Dal dialogo “*Schopenhauer e Leopardi*”.

Ma c'è anche, però, chi gli esami vuole solo “toglierseli e studiare il meno possibile per avere più tempo per andare a giocare a pallone. Tra queste due figure estreme si collocano coloro che desiderano semplicemente studiare ciò che gli viene insegnato nei corsi, ma per i quali la matematica è niente più che una parte - non meno e non più importante di altre - del proprio curriculum di studi.



Questo libro vorrebbe essere utile ad ognuna delle predette categorie di studenti, qualunque sia quella in cui Tu Ti riconosca. Perché sei Tu e solo Tu che puoi decidere di studiare come vuoi, quanto vuoi e quando vuoi. Ora Ti spiego come ho organizzato il testo nel tentativo di raggiungere tale scopo: per informazioni più dettagliate consulta l'Indice, ma non farti spaventare. C'è molto più di quanto potresti avere bisogno per superare quella parte dell'esame di Geometria che riguarda la FCJ, ma in futuro...Chissà?

Il primo capitolo, come facilmente immaginerai, è dedicato alla raccolta dei prerequisiti necessari alla comprensione del testo (molti dei quali andranno rivisti sulle opere già citate [8], [14], ma anche su [15]) e alle notazioni ivi usate.

Il capitolo 2, immediatamente successivo, si intitola significativamente *Come trovare la FCJ di una matrice*. Pensato principalmente per quegli studenti che si contentano di “togliersi l'esame di Geometria”, il suo scopo è di insegnare a trovare la FCJ di una matrice quadrata  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  e  $4 \times 4$  attraverso la spiegazione di un “procedimento che eluda la necessità di porsi delle domande.

Il capitolo è infatti accompagnato da una nutritissima serie di esercizi risolti che dovrebbero allenare lo studente a trovare la FCJ di una matrice quadrata senza necessaria-mente conoscere tutte le finesse della teoria. Per superare uno scritto d'esame, magari non al primo colpo, ciò spesso basta e avanza.

Agli studenti che si sentono attratti dal pensiero astratto e desiderano studiare la materia in modo approfondito, invece, ho dedicato i capitoli 4 e 5, dove viene trattata la teoria generale

che conduce ineluttabilmente alla dimostrazione dell'esistenza di una forma canonica di Jordan per una matrice quadrata a coefficienti complessi. I palati più fini vi potranno trovare delle vere e proprie *delicatessen*, come la definizione e le prime proprietà degli spazi vettoriali quoziente. Costoro potrebbero cominciare a leggere il libro direttamente da questo capitolo e verificare l'apprendimento della teoria misurandosi con gli esercizi del capitolo 2, dei quali si può disporre non del solo risultato, ma anche del procedimento risolutivo.

Al terzo tipo di studente, quello diligente, che vuole studiare ingegneria ma non ha particolare gusto per l'approfondimento matematico, è stato dedicato il capitolo "cuscinetto" 3 il cui scopo è sviluppare familiarità con gli ingredienti necessari per la costruzione della forma canonica di Jordan: matrici a blocchi, matrici nilpotenti, blocchi elementari di Jordan, polinomio minimo e caratteristico, teorema di Cayley-Hamilton. Per questo terzo tipo di studente, di indole più mansueta di quelli già descritti, la successione Capitolo 2, 3, 4, 5, dovrebbe costituire un gradualissimo percorso di apprendimento della teoria e pratica di tale strumento, particolarmente importante per la soluzione dei sistemi di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti.

A tutti i tipi di studenti sono invece destinati i capitoli 6 e 7, che potranno leggerli, se volessero e/o ne avessero bisogno, a seconda dei gusti e delle inclinazioni: sfogliandone distratamente le pagine, cercando solo il risultato e/o la formula che serve, o con la cura distaccata di chi non vuol raccogliere i vari stimoli, disseminati qua e là, per ulteriori approfondimenti. Gli "impallinati, invece, troveranno qui pure delle raffinatezze per palati sensibili, come la definizione della norma di un'applicazione lineare e l'esempio di un'applicazione lineare (la derivata!) che non è limitata.

Lo scopo del Capitolo 6 è la definizione e lo studio dell'esponenziale di una matrice e lo studio di metodi pratici per la soluzione di equazioni differenziali del prim'ordine a coefficienti costanti, eventualmente non omogenei. La nozione di forma canonica di Jordan si rivelerà, qui, di importanza fondamentale.

Per quanto riguarda il calcolo esplicito della matrice esponenziale sono stati raccolti diversi metodi, facilmente applicabili a matrici di tipo particolare. Una menzione speciale va all'esponenziale di una matrice con autovalori tutti distinti, che può calcolarsi ricorrendo ai *polinomi interpolatori di Lagrange*, o al metodo basato sulla *trasformata di Laplace*, che Tu, futuro ingegnere, dovrai imparare ad usare.

Se provi a leggere il libro da capo a fondo potresti trovare, qua e là, degli errori (di stampa, chissà quanti me ne saranno sfuggiti!), e me ne scuso anticipatamente, ma potrai anche notare un procedere per passi piccoli, lenti e gradualmente, dove i concetti vengono spesso ripetuti – in omaggio alle migliori *soap* – oppure rivisti attraverso lo svolgimento degli esercizi. E' come se avessi cercato di comporre la pedagogia anglosassone del *learning by doing* con quella latina del *repetita iuvant*.

Il tutto si conclude con due appendici: la prima, *Dirty Tricks*, intesa ad illustrare alcune piccole malizie spesso necessarie per risparmiare tempo durante l'esecuzione di una prova scritta, in cui non sempre si ragiona a mente fredda; e la seconda, *Superstizioni*, che raccoglie una lista – certamente incompleta – di (false) credenze comuni e pregiudizi di probabile origine ancestrale.

Ma se il libro è stato scritto per Te, allievo ingegnere, non escluderei comunque la possibilità che esso possa rivelarsi utile anche ad alcuni studenti del corso di laurea in Fisica, soprattutto a quelli di indirizzo teorico, per i quali l'esponenziale di matrici è il primo esempio concreto della mappa esponenziale definita su un'algebra di Lie di un gruppo di Lie (a valori in un intorno dell'elemento neutro del gruppo stesso). Anche, credo, il testo potrebbe essere utile a quegli studenti di matematica che, sull'onda di un euforico entusiasmo per teorie raffinatissime e sofisticate, potrebbero pericolosamente sottovalutare l'importanza di saper risolvere un semplice sistema di equazioni differenziali. Purtroppo, il sapere che la soluzione esiste ed è, spesso, unica, non aiuta granché a trovarla. E se spero che il presente libro, in qualità di sussidio didattico complementare nei corsi pertinenti, possa anche servire a qualche mio collega, occorre però aggiungere, per onestà, che il testo non è utile a tutti.

Non è certamente utile allo studente che sa, sapendo di sapere, e che già sapeva tutto prima di iscriversi alla Facoltà di Ingegneria. Così come non servirà mai allo studente che non è disposto a fare fatica. Lo sforzo di semplificare la materia trattata non significa l'aver eliminato gli inevitabili sforzi richiesti al lettore per l'apprendimento. Ad un re che Gli chiedeva come impararla senza fatica, Euclide rispose: "*Sire, non esistono vie regie per la matematica*". Tuttavia, se non sono riuscito a rendere facili le cose difficili, spero almeno, come disse *Nonricordoppiuchi*, di non aver reso difficili le cose facili.

Se hai osservazioni, critiche e commenti che mi possano permettere un miglioramento, sicuramente possibile, di una futura seconda edizione di questo volume, non esitare a scrivermi. Il mio indirizzo di e-mail è "LGATTO@POLITO.IT". Rispondo a tutti.

Questo libro è dedicato ai *fedelissimi* del corso di Geometria per Ingegneri Meccanici-Aerospaziali, a.a. 1996/97, cui desidero ricambiare la simpatia dimostratami. Essi rappresentano un po' tutti quegli studenti che, nel corso di questi miei primi anni di esperienza al Politecnico di Torino, aldilà delle umane imperfezioni, hanno saputo e/o voluto apprezzare - e quindi incoraggiare - il mio sforzo di rendermi loro utile attraverso una presentazione della materia mirata a sdrammatizzare l'immagine severa e intimidatoria che un pregiudizio, a dire il vero piuttosto diffuso, attribuisce alla Matematica.

Primavera 1998

Letterio

# Bibliografia

- [1] V. I. Arnold, *Equazioni differenziali ordinarie*, MIR.
- [2] T. M. Apostol, *Calcolo*, Volume Terzo (Analisi 2), Boringhieri, (1982).
- [3] A. Bacciotti, *Teoria matematica dei Controlli*, CELID, (1998).
- [4] A. Bacciotti, F. Ricci, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Levrotto & Bella, Torino, (1991).
- [5] G. Cervelli, A. Di Lello, *Geometria (Esercizi svolti)*, CLUT, (1994).
- [6] F. De Sanctis, *Saggi Critici*, Fratelli Treves Editori, Milano, (1918).
- [7] L. Gatto, *Lezioni sulle forme canoniche degli endomorfismi*, Comune di Mondovì, a.a. 1993/94.
- [8] S. Greco, P. Valabrega, *Lezioni di Geometria e Algebra Lineare*, Levrotto & Bella, (1992).
- [9] A. R. Hall, *Filosofi in Guerra (La polemica tra Newton e Leibniz)*, Il Mulino, Bologna, (1982).
- [10] J. Joyce, *Ritratto dell'artista da giovane*, Universale Tascabile Newton, (1981).
- [11] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, 1870; Gauthier-Villars (Ristampa), (1957).
- [12] G. Monegato, *Fondamenti di Calcolo Numerico*, Levrotto & Bella, (1990).
- [13] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc. Graw Hill, (1983).
- [14] A. Sanini, *Lezioni di Geometria*, Levrotto & Bella, (1993).

- [15] R. Shaw, *Linear Algebra and Group Representations*, Vol. I, London Academic Press, (1982).
- [16] S. Lipschutz, *Algebra Lineare*, Collana Schaum, (1975).
- [17] R. A. Usmani, *Applied Linear Algebra*, Marcel Dekker, inc., (1987).
- [18] A. Wiles, *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics (2), **141** (1995), 443-551.