

Esercizio (J. Cordover)

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{e } f_A : \mathbb{R}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

definita da

$$f_A(B) = A \cdot B$$

- i) Spiegare perché f_A è lineare;
- ii) trovare $\text{Im}(f_A)$ (l'immagine)
la dimensione e una base;
- iii) Determinare la dimensione del
nucleo e una sua base;
- iv) Determinare autovalori, autovettori,
moltiplicità algebriche e geometriche
e determinare gli autospazi.
- v) Determinare una base E di $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ e determi-
nare la matrice

$$M_b^E \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

associata all'endomorfismo f_A .

Soluzione La matrice A è fissa.

La matrice B è variabile. Sia

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4z & 3y+4t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$$

i) Siccome $A \cdot B$ si esprime per mezzo di una matrice di forme lineari la funzione f_A è lineare.

ii) Notare che

$$\mathcal{E} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di $\mathbb{R}^{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Ora $\text{Im}(f_A) =$ spazio vettoriale generato da $f_A(E_{ij}) =$

$$\begin{aligned} & [f_A(E_{11}), f_A(E_{12}), f_A(E_{21}), f_A(E_{22})] = \\ & = [AE_{11}, AE_{12}, AE_{21}, AE_{22}] = \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

sottraendo $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ perché sono multipli di $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Quunque $\dim \text{Im}(f_A) = 2$. e una base è $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ (dividendo per 3)

iii)

$$\text{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x+4z & 3y+4t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$3x+4z=0 \quad \text{e} \quad 3y+4t=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

Quindi

$$\text{Ker}(f_A) = \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right]$$

↖ base Ker

$$\dim \text{Ker}(f_A) = 2 \quad \text{come}$$

potrebbe prevedersi da teorema immagine
e nucleo.

iv) Autovettori e autovettrici.

$$\text{Ker}(f_A) = \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right] \text{ è }$$

autospazio relativo ad autovalore

nullo.

$$mg(0) = \dim \text{Ker}(f_A) = 2.$$

Per trovare tutti gli autovalori, cerchiamo
 $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ non nulla, tale che

$$A \circ B = \lambda B \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{pmatrix} 3x+4z & 3y+4t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + 4z = 0 \\ 3x + (4-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} (3-\lambda)y + 4t = 0 \\ 3y + (4-\lambda)t = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema (e anche il secondo) ha
soluzioni non nulle solo se

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \lambda(\lambda-7) = 0$$

quindi $\text{Spec}(f_A) = \{0, 7\}$.

Autospazio relativo a 7 è l'insieme
tali che

$$\begin{cases} -4x + 4z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 4t = 0 \\ 3y - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = z \quad \wedge \quad y = t.$$

Quindi Autovettori relativi a 7 sono

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}, \text{ ossia}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Base } \text{Ker}(f_4 - 7 \text{id}_{2 \times 2}) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\dim(7) = 2.$$

Allora: $\dim(0) \geq 2$
 $\dim(7) \geq 2$

$$\dim(0) + \dim(7) = 4 \quad \Rightarrow \quad \dim(0) = \dim(7) = 2.$$

Il polinomio caratteristico è allora

$$T^2(T-7)^2 = P_{f_A}(T).$$

Matrice associata

Consideriamo le base

$$E = [E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}]$$

1 modo

$$M_B^E = \left(f_A(E_{11})_E, f_A(E_{12})_E, f_A(E_{21})_E, f_A(E_{22})_E \right)$$

$$= \left((AE_{11})_E, (AE_{12})_E, (AE_{21})_E, (AE_{22})_E \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_E, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_E, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_E, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_E \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \swarrow \text{matrice cercata}$$

Notare che $P_M(T) = T^2(T-7)^2$

e che la matrice è diagonalizzabile.

2 modo

Le $f_A(B) = \begin{pmatrix} 3x+4z & 3y+4t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}^*$

Applicando l'isomorfismo con $\mathbb{R}^4$

dato dalle base E si ottiene le colonne

$$\begin{pmatrix} 3x + 4z \\ 3y + 4t \\ 3x + 4z \\ 3y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$



Matrice ASSOCIATA
rispetto alle base E