Soluzione Degli Esercizi

VERSIONE A

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -33 & -44 & -11 \end{pmatrix}$$

1) Un'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \ker f = \ker A \text{ è}$$

per esempio:

$$(3, 4, 1) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\ker f = \ker A$ perché $rk(A) = 1$

2) f è suriettiva perché

$$rk(3, 4, 1) = 1$$

3) $\dim \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \underset{(*)}{3x + 4y + z = 0} \right\} = 2$

(3 incognite un'equazione).

Una base $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$

(o qualsiasi coppie di terne linearmente indipendenti verificanti (*).

4) La matrice ha rango 1. Quindi 0 è autovalore almeno doppio perché

$mg(0) = 3 - rk(A) = 2.$

Il terzo autovalore λ è tale che

$$\underbrace{0 + 0}_{\text{autovalore doppio}} + \lambda = \text{traccia}(A) = 3 + 8 - 11 = 0$$

Quindi $\operatorname{Spec}(A) = \{0\}$ e $ma(0) = 3$.

5) L'unico autospazio è $\ker(A)$, già calcolato in 3).

6) Non esiste P / $P^T A P$ = diagonale perché A non è simmetrica.

7) $\nexists$ P / $P^{-1} A P$ sia diagonale perché A possiede un solo autospazio di dimensione ?

$(3 = ma(0) > mg(0) = ?)$.

VERSIONE B

Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -9 & -12 & -3 \end{pmatrix}$

1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ è, per esempio:

$$(3, 4, 1) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto 3x + 4y + z$$

2) f è suriettiva, perché

$$\mathrm{rk}\,(3, 4, 1) = 1 = \dim \mathbb{R}$$

3) $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 3x + 4y + z = 0 \\ (*) \end{matrix} \right\}$.

Quindi $\dim \ker f = 2$ (3 incognite, un'equazione)

Una base: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

o quelle coppie di terne verificanti (*).

4) Siccome $rk(A) = 1$, $0 \in Spec(A)$

e $mg(0) = 3 - rk(A) = 2$.

Quindi 0 è autovalore doppio.

Il 3° autovalore λ è tale che

$$0 + 0 + \lambda = \text{traccia}(A) = 3 + 8 - 3 = 8$$

Dunque $ma(0) = 2$.

5) Un autospazio è il nucleo.

L'altro è $\ker(A - 8\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ -9 & -12 & -11 \end{pmatrix}$

Da cui: $\begin{cases} 3x + z = 0 \\ -5x + 4y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 3x \\ 4y = 5x - z \end{cases}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \ker(A - 8\mathbb{1})$$

6) Non esiste perché A non è simmetrica.

7) Esiste perché A ha due autovalori con molteplicità algebrica e geometrica coincidenti.

VERSIONE C

E' data

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 12 & 18 \\ 9 & 18 & 27 \end{pmatrix}$$

1) Un'applicazione lineare

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$\ker A = \ker f$ è :

$$(3 \quad 6 \quad 9) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto 3x + 6y + 9z$$

o, anche, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x + 2y + 3z$

2) $rk(1, 2, 3) = 1 = \dim \mathbb{R}$

è suriettiva.

3) $\dim \ker f = \dim \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x+2y+3z=0 \right\}$

$= 2 =$ n. incognite meno n. equazioni.

$$\ker f = \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \Big]$$

4) La matrice ha rango 1.

Quindi $0 \in Spec(A)$ e

$mg(0) = \dim \ker A = 2$

Siccome è simmetrica $ma(0) = 2$

Il terzo autovalore λ è :

$$0 + 0 + \lambda = \text{traccia}(A) = 42$$

$$\lambda = 42$$

5) Un autospazio è $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

l'altro relativo a $\lambda = 42$ è

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

6) Sì, esiste perché A è simmetrica

7) Sì, perché A è simmetrica e, quindi, diagonalizzabile.

Versione D

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 6 & 12 & 18 \\ 9 & 18 & 27 \end{pmatrix}$$

1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1, 2, 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

è una tale applicazione. [qualsiasi riga di A avrebbe dato la f].

2) f è suriettiva perché

$\operatorname{rk}(1, 2, 3) = 1 = \dim \mathbb{R}$

3) $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x + 2y + 3z = 0 \right\}$

Quindi $\ker f = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$

è base di nucleo.

4) $0 \in \mathrm{Spec}(A)$ e $mg(0) = 2$

perché $rk(A) = 1$.

L'altro autovalore $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ è:

$$0 + 0 + \lambda = tr(A) = 36$$

da cui $\lambda = 36$.

5) Un autospazio è $\ker A = \ker f =$

$$= \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

L'altro è:

$$\ker(A - 36\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -39 & -6 & -9 \\ 6 & -24 & 18 \\ 9 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 13x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array} \right\}$$

a piacere

$x = 1$

$$\begin{cases} 2y + 3z = -13 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$4z = -12 \qquad z = -3$$

$$2y = -1 + z = -1 - 3 = -4 \qquad y = -2$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

6) No, perché A non è simmetrica

7) Sì perché abbiamo trovato 3 autovettori linearmente indipendenti.

$mg(0) = ma(0) = 2$

$mg(36) = ma(36) = 1$