Note sulle Catene di Markov

ELAUT – Prof. Giuseppe C. Calafiore

Sommario

Queste note contengono un estratto schematico ridotto di parte del materiale relativo alle Catene di Markov a tempo continuo e a tempo discreto contenuto nei capitoli 16 e 17 del testo G. Calafiore, *Elementi di Automatica*, II ed., Clut, 2007.

1 Catene di Markov Omogenee a Tempo Discreto

Una Catena di Markov omogenea (CM) a tempo discreto è un processo stocastico discreto definito tramite:

1. Uno spazio degli stati numerabile X, che può essere finito o infinito ($X = \{1, 2, \dots, n\}$, dove n è un intero finito), oppure infinito ($X = \{1, 2, \dots\}$).
2. Una probabilità iniziale definita sugli stati del sistema al tempo $k = 0$:

$$\pi_i(0) = \text{Prob}\{\mathbf{x}(0) = i\}, \quad \forall i \in X.$$

3. Un insieme di probabilità di transizione p_{ij}, definite per ogni coppia di possibili stati $i, j \in X$. La probabilità p_{ij} esprime la probabilità con la quale lo stato all'istante successivo $k + 1$ assumerà il valore $\mathbf{x}(k + 1) = i$, noto che il valore corrente dello stato è $\mathbf{x}(k) = j$:

$$p_{ij} = \text{Prob}\{\mathbf{x}(k + 1) = i | \mathbf{x}(k) = j\}, \quad \forall i, j \in X.$$

Quando la catena è finita, detto n il numero degli stati della catena, le probabilità di transizione possono essere collettivamente rappresentate tramite una matrice quadrata P di dimensioni $n \times n$, detta appunto *matrice di transizione* della catena:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

dove l'elemento p_{ij} in riga i e colonna j rappresenta la probabilità condizionata che la catena, al passo successivo, salti allo stato i, noto che essa si trova attualmente nello stato j. Dato che gli elementi di P sono probabilità, tutti gli elementi di P sono numeri compresi tra zero e uno, ed inoltre, siccome da ogni stato j la catena certamente salterà verso qualcuno degli stati, avremo che la somma degli elementi lungo ogni colonna di P è pari ad uno, cioè

$$p_{ij} \in [0,\ 1],\ \forall i, j = 1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1,\ \forall j = 1, \dots, n.$$

Tali condizioni si scrivono anche più compattamente come

$$P \geq 0, \quad \mathbf{1}^\top P = \mathbf{1},$$

dove $\mathbf{1}$ rappresenta un vettore di tutti uno di dimensione n, ossia $\mathbf{1}^\top = [1\,1\,\cdots\,1]$. La relazione $\mathbf{1}^\top P = \mathbf{1}$ indica, tra l'altro, che $\lambda_1 = 1$ è uno degli autovalori di P, detto *autovalore principale*. Il teorema di Perron-Frobenius (vedasi Corollario 16.4 a pag. 444 del testo) dice inoltre che tutti gli altri $n-1$ autovalori di P, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hanno modulo minore o uguale a uno:

$$\lambda_1(P) = 1, \quad |\lambda_i(P)| \leq 1, \; i = 2, \ldots, n.$$

Gli autovettori di P associati all'autovalore principale sono (per definizione stessa di autevettore) quei vettori $\pi \in \mathbb{R}^n$ tali per cui

$$P\pi = \pi, \tag{1}$$

e tale relazione è anche la relazione che definisce le cosiddette *distribuzioni invarianti*, o di equilibrio, per la catena (vedasi Definizione 16.1 a pag. 435 del testo).

1.1 L'evoluzione nel tempo della probabilità di stato

Se ad una CM a tempo discreto finita si assegna una distribuzione (vettore) di probabilità sugli stati $\pi(0) \in \mathbb{R}^n$ al tempo $k = 0$, è possibile determinare come la probabilità di stato evolve nel tempo agli istanti successivi. Essa infatti evolve in accordo alla cosiddetta ricorsione di Chapman-Kolmogorov (eq. (16.2) nel testo)

$$\pi(k+1) = P\pi(k). \tag{2}$$

Data la condizione iniziale $\pi(0)$, applicando ricorsivamente la (2) otteniamo l'espressione per la probabilità di stato a qualsiasi $k \geq 0$:

$$\pi(k) = P^k \pi(0), \tag{3}$$

dove P^k prende il nome di *matrice di transizione a k passi*.

1.1.1 Distribuzioni invarianti e distribuzioni asintotiche

Le distribuzioni invarianti sono quelle distribuzioni (vettori) di probabilità π tali per cui se $\pi(0) = \pi$, allora $\pi(k) = \pi$ per tutti i $k \geq 0$. Quest'ultima condizione avviene se e solo se π soddisfa la relazione

$$P\pi = \pi,$$

cioè, come detto precedentemente, se π è un autovettore di P associato all'autovalore principale $\lambda_1 = 1$. Data una probabilità iniziale $\pi(0)$, chiamiamo invece *probabilità asintotica* il limite seguente (se esso esiste)

$$\pi_\infty = \lim_{k \to \infty} \pi(k).$$

Esiste una relazione tra la probabilità asintotica (che, lo ricordiamo, può dipendere dalla particolare condizione iniziale $\pi(0)$ assegnata alla catena) e le probabilità invarianti (i vettori di probabilità π soluzione di $P\pi = \pi$). In particolare, se la catena è finita e π_∞ esiste, allora certamente π_∞ coincide con una delle distribuzioni invarianti della catena (Lemma 16.2). Questo tuttavia non aiuta molto per sapere a priori se π_∞ esisterà o no. Inoltre, se la distribuzione invariante non è unica, non sappiamo con *quale* delle distribuzioni invarianti π_∞ coincide. Il Lemma 16.3 del testo fornisce però delle condizioni sulla matrice P che, se sono soddisfatte, garantiscono che la distribuzione invariante sia unica, e che π_∞ esista, e quindi coincida con l'unica distribuzione invariante, indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Lemma 1 (Lemma 16.3 del testo) *Sia $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice di transizione di una CM a tempo discreto omogenea e finita. Sia $\lambda_1 = 1$ l'autovalore principale di P, e siano $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ i rimanenti autovalori di P. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Tutti gli autovalori λ_i, $i = 2, \dots, n$, hanno modulo strettamente minore di uno (cioè $|\lambda_i| < 1$, $i = 2, \dots, n$);*
2. *Esiste ed è unico un vettore di probabilità π che soddisfa l'equazione di equilibrio $P\pi = \pi$, ed inoltre, per qualsiasi probabilità iniziale $\pi(0)$, si ha che*

$$\pi_\infty \doteq \lim_{k\to\infty} \pi(k) = \pi.$$

1.1.2 Catene regolari

Una CM finita è detta *irriducibile* quando da ogni stato è possibile raggiungere ogni statocon probabilità non nulla. Tale proprietà è abbastanza facile da verificare, almeno per dimensioni n piccole, osservando il grafo di transizione che descrive la catena: per ogni coppia di stati (i, j) (inclusa la coppia (j, j)) deve esistere un *percorso*, cioè una sequenza orientata di link, che porta da j ad i con probabilità non nulla (i.e., il prodotto di tutte le probabilità di transizione associate ai link sul percorso deve essere diverso da zero).

Vale la seguente definizione (si vedano la Definizione 16.4 ed il Lemma 16.1 del testo):

Definizione 1 (Catene regolari) *Una CM a tempo discreto omogenea e finita è detta* regolare*, se esiste un intero $k > 0$ tale per cui la matrice P^k ha tutti gli elementi strettamente positivi.*

Esiste poi una condizione sufficiente che implica la regolarità, di facile verifica:

Lemma 2 (Condizione sufficiente per la regolarità) *Se una CM a tempo discreto omogenea finita è irriducibile, ed inoltre possiede almeno un elemento non nullo sulla diagonale di P (cioè se $p_{ii} > 0$ per un qualche i), allora essa è regolare.*

Il Corollario 16.5 del testo garantisce che se una catena è regolare, allora certamente per essa sono verificate le condizioni di cui al punto 1. del Lemma 1, e quindi vale il risultato di cui al punto 2. del medesimo lemma. Il vantaggio consiste nel fatto che talvolta stabilire se una catena è regolare è più facile che non verificare direttamente la condizione 1. del Lemma 1 (cosa che richiede il calcolo degli autovalori di P). Sintetizzando, abbiamo il seguente corollario.

Corollario 1 *Se una CM a tempo discreto omogenea finita è regolare, allora esiste ed è unico un vettore di probabilità π che soddisfa l'equazione di equilibrio $P\pi = \pi$, ed inoltre, per qualsiasi probabilità iniziale $\pi(0)$, si ha che*

$$\pi_\infty \doteq \lim_{k\to\infty} \pi(k) = \pi.$$

2 Catene di Markov Omogenee a Tempo Continuo

Una Catena di Markov omogenea a tempo continuo è un processo stocastico definito tramite:

1. Uno spazio degli stati numerabile X, che può essere finito o infinito ($X = \{1, 2, \ldots, n\}$, dove n è un intero finito), oppure infinito ($X = \{1, 2, \ldots\}$).
2. Una probabilità iniziale definita sugli stati del sistema al tempo $t = 0$:

$$\pi_i(0) = \text{Prob}\{\mathbf{x}(0) = i\}, \quad \forall i \in X.$$

3. Un insieme di *frequenze istantanee di transizione* q_{ij}, definite per ogni coppia di stati $i, j \in X$, $i \neq j$. Supponendo che la catena si trovi nello stato j all'istante t, la probabilità che la catena si trovi nello stato i all'istante $t + \tau$, $\tau > 0$, è data da

$$p_{ij}(\tau) \doteq \text{Prob}\{\mathbf{x}(t + \tau) = i | \mathbf{x}(t) = j\} \tag{4}$$

   ed è indipendente da t. La frequenza istantanea di transizione da j ad i è data da

$$q_{ij} \doteq \lim_{\tau \to 0} \frac{p_{ij}(\tau)}{\tau}, \quad i \neq j; \quad q_{ii} \doteq -\sum_{j \neq i} q_{ji}. \tag{5}$$

Quando la catena è finita, detto n il numero degli stati della catena, si definisce *matrice delle frequenze di transizione* una matrice quadrata Q di dimensioni $n \times n$ tale per cui

$$[Q]_{ij} = q_{ij}, \ i \neq j = 1, \ldots, n; \quad [Q]_{ii} = -\sum_{i \neq j} q_{ij}, \ i = 1, \ldots, n.$$

L'elemento q_{ij} in riga i e colonna j rappresenta la frequenza istantanea di transizione dallo stato j allo stato i. Ogni elemento sulla diagonale cambiato di segno, $\Lambda_i = -q_{ii}$, rappresenta la frequenza (tasso) di una distribuzione esponenziale che descrive il tempo di soggiorno della catena nello stato i-esimo (si veda l'Osservazione 17.2 a pag. 458 nel testo). Per come è stata costruita, la matrice Q è tale per cui la somma degli elementi su ogni colonna vale zero, cioè

$$\mathbf{1}^\top Q = [0\,0 \cdots 0],$$

il ché implica che $\lambda_1(Q) = 0$ è un autovalore di Q.

2.1 L'evoluzione nel tempo della probabilità di stato

Se ad una CM a tempo continuo omogenea finita si assegna una distribuzione (vettore) di probabilità sugli stati $\pi(0) \in \mathbb{R}^n$ al tempo $t = 0$, è possibile determinare come la probabilità di stato evolve nel tempo agli istanti successivi. Essa infatti evolve in accordo alla cosiddetta equazione di Chapman-Kolmogorov (eq. (17.3) nel testo)

$$\dot{\pi}(t) = Q\pi(t). \tag{6}$$

Data la condizione iniziale $\pi(0)$, da tale sistema di equazioni differenziali lineari e omogenee si ottiene l'espressione per la probabilità di stato a qualsiasi $t \geq 0$:

$$\pi(k) = \mathrm{e}^{Qt}\pi(0). \tag{7}$$

2.1.1 Distribuzioni invarianti e distribuzioni asintotiche

Le distribuzioni invarianti sono quelle distribuzioni (vettori) di probabilità π tali per cui se $\pi(0) = \pi$, allora $\pi(t) = \pi$ per tutti i $t \geq 0$. Quest'ultima condizione avviene se e solo se π soddisfa la relazione

$$Q\pi = 0,$$

da cui segue che le distribuzioni invarianti sono tutti e soli gli autovettori di Q associati all'autovalore $\lambda_1(Q) = 0$. Data una probabilità iniziale $\pi(0)$, chiamiamo invece *probabilità asintotica* il limite seguente (se esso esiste)

$$\pi_\infty = \lim_{t\to\infty} \pi(t).$$

Esiste una relazione tra la probabilità asintotica e le probabilità invarianti (i vettori di probabilità π soluzione di $Q\pi = 0$). In particolare, il Lemma 17.2 del testo fornisce delle condizioni sulla matrice Q che, se soddisfatte, garantiscono che la distribuzione invariante sia unica, e che π_∞ esista e coincida con l'unica distribuzione invariante, indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Lemma 3 (Lemma 17.2 del testo) *Sia $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice delle frequenze di transizione di una CM a tempo continuo omogenea e finita. Sia $\lambda_1 = 0$ l'autovalore principale di Q, e siano $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i rimanenti autovalori di Q. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Tutti gli autovalori λ_i, $i = 2, \ldots, n$, hanno parte reale strettamente minore di zero (cioè $Re(\lambda_i) < 0$, $i = 2, \ldots, n$);*
2. *Esiste ed è unico un vettore di probabilità π che soddisfa l'equazione di equilibrio $Q\pi = 0$, ed inoltre, per qualsiasi probabilità iniziale $\pi(0)$, si ha che*

$$\pi_\infty \doteq \lim_{t\to\infty} \pi(t) = \pi.$$

2.1.2 Catene ergodiche

Una CM a tempo continuo finita ed irriducibile è *ergodica*. Il Lemma 17.1 del testo garantisce che se una catena è ergodica, allora certamente per essa sono verificate le condizioni di cui al punto 1. del Lemma 3, e quindi vale il risultato di cui al punto 2. del medesimo lemma. Il vantaggio consiste nel fatto che talvolta stabilire se una catena finita è ergodica è più facile che non verificare direttamente la condizione 1. del Lemma 3 (cosa che richiede il calcolo degli autovalori di Q). Sintetizzando, abbiamo il seguente corollario.

Corollario 2 *Se una CM a tempo continuo omogenea e finita è ergodica, allora esiste ed è unico un vettore di probabilità π che soddisfa l'equazione di equilibrio $Q\pi = 0$, ed inoltre, per qualsiasi probabilità iniziale $\pi(0)$, si ha che*

$$\pi_\infty \doteq \lim_{k\to\infty} \pi(k) = \pi.$$

Stabilire l'ergodicità per catene infinite può essere più complicato. Alcuni tipi particolari di CM a tempo continuo infinite sono trattati trattati nella Sez. 17.7 e nel Capitolo 18 del testo.