3

Localmente carità

Nirmal Hriday

Calcutta, o più correttamente Kolkata, è una megalopoli di oltre quattordici milioni di abitanti. Il visitatore europeo appena arrivato rimane disorientato dall'odore umido e dolciastro, tipico di quella zona dell'immenso delta del sacro fiume Gange, mischiato al grande inquinamento. Vi è un'unica linea di metro molto ben funzionante. Se scendete alla fermata Kalighat, oltre il grande parco di Maidan e il maestoso Victoria Memorial Hall, e vi inoltrate nel variopinto quartiere, in pochi minuti vi troverete davanti a un tempio dedicato alla dea Kali.

Proprio lì accanto si trova Nirmal Hriday (la casa del cuore puro). È la prima casa aperta da madre Teresa nel 1952 per accogliere i morenti. Lo scopo era quello di far in modo che i più poveri tra i poveri non morissero per strada abbandonati, come spesso accadeva, ma si sentissero accolti e amati almeno nell'ora della morte. È bello che un luogo così significativo per il cristianesimo si trovi nei locali di un tempio indù.

Al pian terreno ci sono due stanzoni, uno per gli uomini e uno per le donne. In mezzo c'è un grande locale con la lavanderia, le vasche dove lavare i piatti e i bagni. Vi sono poi delle scale che portano al primo piano, quasi tutto occupato da terrazzi, tranne una cappella. Le suore di madre Teresa passano molto tempo in preghiera, spesso davanti ad un'Ostia consacrata. In questa spoglia cappella ci sono delle finestre basse. Chiunque sia inginocchiato in preghiera può vedere contemporaneamente il Crocifisso con accanto la scritta «I thirst», l'Ostia sull'altare e alcuni ospiti della struttura nei lori letti al piano di sotto. Ecco che viene quindi spontaneo identificare l'amore per Gesù con quello per i poveri e pensare in modo assai concreto al seguente brano del Vangelo di Matteo:

> Quando il Figlio dell'uomo verrà nella sua gloria, e tutti gli angeli con lui, siederà sul trono della sua gloria. Davanti a lui verranno radunati tutti i popoli. Egli separerà gli uni dagli altri, come il pastore separa le pecore dalle capre, e porrà le pecore alla sua destra e le capre alla sinistra. Allora il re dirà a quelli che saranno alla sua destra: «Venite, benedetti del Padre mio, ricevete in eredità il regno preparato per voi fin dalla creazione del mondo, perché ho avuto fame e mi avete dato da mangiare, ho avuto sete e mi avete dato da bere, ero straniero e mi avete accolto, nudo e mi avete vestito, malato e mi avete visitato, ero in carcere e siete venuti a trovarmi». Allora i giusti gli risponderanno: «Signore, quando ti abbiamo visto affamato e ti abbiamo dato da mangiare, o assetato e ti abbiamo dato da bere? Quando mai ti abbiamo visto straniero e ti abbiamo accolto, o nudo e ti abbiamo vestito? Quando mai ti abbiamo visto malato o in carcere e siamo venuti a visitarti?». E il re risponderà loro: «In verità io vi dico: tutto quello che avete fatto a uno solo di questi miei fratelli più piccoli, l'avete fatto a me». Poi dirà anche a

quelli che saranno alla sinistra: «Via, lontano da me, maledetti, nel fuoco eterno, preparato per il diavolo e per i suoi angeli, perché ho avuto fame e non mi avete dato da mangiare, ho avuto sete e non mi avete dato da bere, ero straniero e non mi avete accolto, nudo e non mi avete vestito, malato e in carcere e non mi avete visitato». Anch'essi allora risponderanno: «Signore, quando ti abbiamo visto affamato o assetato o straniero o nudo o malato o in carcere, e non ti abbiamo servito?». Allora egli risponderà loro: «In verità io vi dico: tutto quello che non avete fatto a uno solo di questi più piccoli, non l'avete fatto a me. E se ne andranno: questi al supplizio eterno, i giusti invece alla vita eterna» (Mt 25,31-46).

Madre Teresa aveva sempre in mente questo brano e diceva alle sue Missionarie della Carità:

> Avete visto con quanto amore e delicatezza il sacerdote trattava il corpo di Cristo durante la Messa. Assicuratevi di far lo stesso quando andate nella Casa del Moribondo, perché lì si trova Gesù nelle sembianze del dolore.

Charles de Foucauld scrive:

> Quest'uomo che passa e che è povero, nudo, viandante, sofferente, non ci chiede niente ma è membro di Gesù, porzione di Gesù, parte di Gesù; noi lo lasciamo passare senza dargli ciò di cui ha bisogno... è Gesù che abbiamo lasciato passare dinanzi a noi.

Da questo brano cogliamo dunque non l'aspetto del giudizio, ma la fortissima identificazione tra Gesù e il bisognoso. L'incontrare Gesù non è un'astratta ed eterea visione mistica ma un concretissimo contatto umano. Pensiamo a san Francesco di Assisi nel suo avvicinarsi e abbracciare un lebbroso. Ecco come papa Francesco narra l'episodio ai giovani in Brasile:

> È ben nota la conversione di san Francesco: il giovane Francesco abbandona ricchezze e comodità per farsi povero tra i poveri, capisce che non sono le cose, l'avere, gli idoli del mondo ad essere la vera ricchezza e a dare la vera gioia, ma è il seguire Cristo e il servire gli

altri; ma forse è meno conosciuto il momento in cui tutto questo è diventato concreto nella sua vita: è quando ha abbracciato un lebbroso. Quel fratello sofferente è stato mediatore di luce [...] per san Francesco d'Assisi.

Madre Teresa, dopo vent'anni da insegnante di geografia e da suora nella congregazione di Nostra Signora di Loreto con piena soddisfazione, racconta di aver cominciato a sentire la chiamata «nella chiamata verso i più poveri tra i poveri», quando incontrò una donna agonizzante davanti al Campbell Hospital che morì per strada senza che lei riuscisse a farla accettare in ospedale in quanto troppo povera.

San Giuseppe Benedetto Cottolengo era canonico nella chiesa del Corpus Domini a Torino quando, il 2 settembre del 1827, gli capitò di assistere una donna francese al sesto mese di gravidanza, tale Giovanna Maria Gonnet, affetta da tubercolosi e morente. Non era stata accettata da nessun ospedale e morì così davanti ai figli e al marito piangenti. Questo episodio lo scosse profondamente e lo portò alla fondazione della Piccola Casa della Divina Provvidenza.

È negli episodi concreti con i più poveri e abbandonati che facciamo davvero esperienza di Dio.

Astrazione e coordinate

Dio è amore! È questa la cosa essenziale. Nella prima lettera di Giovanni leggiamo:

> E noi abbiamo conosciuto e creduto l'amore che Dio ha in noi. Dio è amore; chi rimane nell'amore rimane in Dio e Dio rimane in lui (1Gv 4,16).

Dio è dunque amore, ma un amore che trascende la nostra comprensione. È un Dio Uno e Trino con una natura divina e una umana. Le tre persone della Santissima Trinità sono legate e interconnesse da un vincolo di amore che non riusciamo a percepire in pieno.

A sant'Agostino è attribuito questo racconto medievale:

> Mentre Agostino, camminando su una spiaggia deserta, meditava sul mistero della Trinità, vide un bambino che con un secchiello versava l'acqua del mare in una buca nella sabbia. Il Santo bonariamente lo avvertì dell'inutilità dello sforzo, ma il bambino, rivelatosi per un angelo, gli spiegò che una buca nella sabbia può contenere il mare più facilmente di quanto la mente umana possa contenere il mistero della Trinità.

Lasciamo per un po' Agostino vagare per la spiaggia.

Questo racconto mi dà il pretesto per parlare di due concetti più astratti e sfuggenti rispetto agli spazi metrici affrontati nel secondo capitolo, ovvero gli spazi topologici e le varietà topologiche. Il modo in cui abbiamo definito gli insiemi aperti e chiusi attraverso le bolle è soltanto un caso particolare di un concetto più generale. Gli insiemi aperti e chiusi si possono definire in modo assiomatico. Diremo che un insieme X è uno spazio topologico se su di esso è definita una topologia, cioè una famiglia di sottoinsiemi $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, detti aperti, tali che:

(1) $\emptyset, X \subseteq \tau$.
(2) L'intersezione di un numero finito di aperti appartiente a τ.
(3) L'unione di un numero arbitrario (anche infinito) di aperti appartiene a τ.

Chiameremo chiusi i complementari degli aperti. Una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di X tale che contenga l'insieme vuoto e l'insieme X stesso, l'intersezione di un numero finito e l'unione di un numero arbitrario di suoi elementi, può essere chiamata topologia e dare all'insieme X una struttura di spazio topologico. In uno stesso insieme X è possibile definire più topologie. Se X possiede una nozione di distanza, allora sarà definita la topologia i cui aperti sono definiti attraverso le bolle. Ricordiamo che in questo caso un insieme A è un aperto se, dato un qualsiasi suo punto, esiste sempre una bolla centrata in esso tutta contenuta in A. L'insieme X e l'insieme vuoto evidentemente soddisfano questa definizione. Il primo poiché tutte le bolle sono contenute in X e il secondo poiché non ha alcun punto. Inoltre, dati due aperti, la loro intersezione è un aperto, in quanto, preso un punto appartenente a entrambi gli aperti, esisterà una bolla centrata nel punto contenuta nell'intersezione. L'unione di infiniti aperti è poi senz'altro un aperto perché un punto dell'unione appartiene a uno degli aperti e la bolla contenuta in quest'ultimo è ancora nell'unione. Ecco che i tre assiomi sono soddisfatti e siamo di fronte ad una topologia. Questa però sarà soltanto una delle strutture di spazio topologico tra le tante possibili.

Su $\mathbb{R}$, per esempio, oltre alla topologia i cui aperti sono costruiti con le bolle, possiamo pensare alla topologia banale

$$\tau_b = \{X, \emptyset\}$$

e alla topologia discreta

$$\tau_d = \mathcal{P}(X).$$

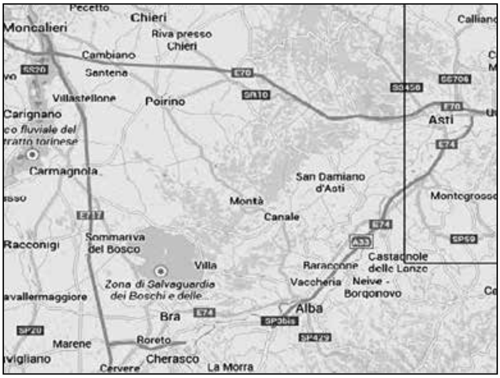
La seconda è una topologia poiché contiene tutti i possibili sottoinsiemi, mentre la prima, avendo solo due elementi, permette una verifica molto rapida.

Un'altra topologia molto interessante è quella di Zariski. Qui definiamo i chiusi come i luoghi di annullamento di un numero finito di polinomi. Poiché i polinomi hanno sempre un numero finito di radici su $\mathbb{R}$ o nessuna, ecco che i chiusi sono $\emptyset$ e gli insiemi formati da un numero finito di punti. Inoltre tra i polinomi bisogna considerare anche quello nullo che per definizione si annulla su tutta le retta reale. Dunque anche $\mathbb{R}$ è un chiuso e quindi gli aperti di Zariski sono $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e gli insiemi formati da tutta la retta reale tranne un numero finito di punti. Se interseco un numero finito di tali insiemi, continuo ad avere $\mathbb{R}$ tranne un numero finito di punti (che sono al più l'unione di tutti i punti che mancavano agli aperti che ho intersecato). L'unione di infiniti aperti è ancora aperto poiché, se al primo aperto mancavano un numero finito di punti, all'unione di tutti nel peggiore dei casi mancheranno gli stessi punti.

La nozione di funzione continua in questo contesto sarà la seguente: $f : X \to Y$ è continua se la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X. Tutte le funzioni tra $\mathbb{R}$ e se stesso con la topologia discreta sono continue in quanto tutti i sottoinsiemi sono aperti. Lo stesso si può dire quando $\mathbb{R}$ ha la topologia banale. In effetti, per qualsiasi funzione, si ha $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Se consideriamo invece le funzioni tra $\mathbb{R}$ con la topologia banale e $\mathbb{R}$ con quella discreta, notiamo che solo le funzioni costanti sono continue. La controimmagine di ogni punto, in effetti, deve essere $\mathbb{R}$ o l'insieme vuoto, ma non possono esserci due punti distinti la cui controimmagine sia tutto il dominio.

Quando consideriamo la topologia costruita con la metrica, come abbiamo accennato nel secondo capitolo, la nozione di continuità con gli $\in$ e i δ coincide con questa più astratta.

In generale, il concetto di spazio topologico è piuttosto astratto e sfuggente e lo stesso possiamo dire delle funzioni continue definite su di esso a valori in un altro spazio. Si tratta tuttavia di una nozione assolutamente centrale in moltissimi contesti della matematica. Sicuramente ci troviamo più a nostro agio su $\mathbb{R}^n$, in cui possiamo considerare la topologia delle bolle. Inoltre, abbiamo la possibilità di orientarci meglio: ogni punto ha le sue coordinate e si può sempre sapere quanto un punto dista da un altro. Se abbiamo in mano una cartina, per esempio, è come se ci trovassimo su di un aperto di $\mathbb{R}^2$: si tratta di un pezzo di carta piatto sul quale è possibile calcolare le distanze tra punti. La cartina rappresenta una porzione della superficie terrestre che piatta non è. Se ci troviamo in una nave in mezzo al mare e guardiamo verso l'orizzonte tutto intorno a noi, abbiamo l'impressione di trovarci in un disco bidimensionale. La terra, che ha una forma pressoché sferica, può essere pensata localmente come un aperto di $\mathbb{R}^2$. Per millenni si è creduto che la terra fosse piatta perché, in effetti, la porzione di essa raggiungibile dal nostro occhio può essere considerata tale con un errore davvero minimo. Una cartina geografica prende quindi una piccola porzione di terra e la considera come fosse piatta. L'errore commesso è trascurabile, impercettibile e i vantaggi sono evidenti. Matematicamente questo si può tradurre affermando che esiste un omeomorfismo tra l'area osservata leggermente curva come è realmente e la sua versione piana che è quella percepita dal nostro occhio. Se poi collezioniamo tante cartine in un atlante possiamo racchiudere tutta la geografia del nostro pianeta in un libro. Un atlante è ben fatto se due cartine vicine sono coerenti. In esse ci sarà infatti una parte comune. In questo modo passando da una all'altra riesco ad orientarmi e riconosco dove sono. Le parti comuni tra due cartine vicine devono dunque essere identiche e, in questo modo, si può pensare idealmente di incollare tra loro tutte le cartine lungo le parti comuni fino ad avere un collage che va a formare un mappamondo.



Nelle due cartine qui sopra vediamo che la parte delimitata dal rettangolo è comune e si possono dunque incollare sovrapponendo i due rettangoli. Questa operazione di incollamento non può essere fatta nel piano. Se mi muovo su cartine che si spostano sull'equatore, infatti, continuerò ad incollare fino a quando l'ultima cartina si dovrà incollare alla prima a formare un anello. Ecco allora che, concretamente, non mi metterò a incollare le cartine ma è comunque importane che un atlante sia ben fatto nelle intersezioni delle sue pagine.

In matematica si definisce varietà topologica di dimensione n uno spazio topologico X tale che ogni suo punto è contenuto in un aperto U_i omeomorfo ad un aperto V_i di $\mathbb{R}^n$. Più precisamente

$$X = \cup_{i=1}^{k} U_i$$

dove gli U_i sono tutti aperti di X e per ogni i si ha un omeomorfismo

$$f_i : U_i \to V_i$$

Gli aperti U_i si chiamano carte locali e, presi tutti insieme, formano un atlante. Inoltre si chiede che queste carte locali siano tra loro compatibili, ovvero ogni qualvolta due di esse si intersecano, si vuole un buon comportamento sull'intersezione della corrispettiva intersezione degli aperti di $\mathbb{R}^n$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ anche $f_i(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$, $f_j(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$ e si ha una funzione naturale così definita:

$$\psi_{ij} = f_j \circ f_i^{-1} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_i \cap U_j)$$

Questa funzione si ottiene con la composizione tra l'inversa di f_i e f_j e si chiama funzione di transizione. Si può definire usando il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & & U_i \cap U_j \subset X & & \\ & f_i^{-1} \nearrow & & \searrow f_j & \\ f_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n & & \xrightarrow{\psi_{ij}} & & f_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Ottengo la funzione di transizione partendo dall'intersezione su $\mathbb{R}^n$, salendo su X attraverso l'omeomorfismo della prima carta, e poi scendendo nuovamente sullo spazio metrico usando l'omeomorfismo della seconda carta. Alla fine trovo una funzione da $\mathbb{R}^n$ in se stesso e la richiesta che viene fatta, per avere un buon atlante, è che questa funzione sia un omeomorfismo. La funzione ψ_{ij} dovrà dunque essere continua e biettiva. Inoltre la sua inversa che sarà ψ_{ji} (ottenuta esattattamente come ψ_{ij} interscambiando i ruoli delle due carte) dovrà essere anch'essa continua.

Uno spazio topologico X sarà dunque una varietà topologica se ammette un atlante le cui funzioni di transizione sono tutte omeomorfismi di $\mathbb{R}^n$. In questo modo nel mio spazio topologico astratto posso considerare delle coordinate almeno localmente. Queste coordinate cambiano di carta in carta, ma questi cambiamenti di coordinate sono gestiti dalle funzioni di transizione. Conoscendo le funzioni di transizione, che sono funzioni sullo spazio metrico a me più comprensibile, riesco ad avere un'idea del mio spazio topologico astratto.

Se si chiede alle funzioni di transizione di essere anche differenziabili o razionali o analitiche, si potrà parlare di varietà differenziabili o algebriche o analitiche. Il concetto di varietà è però sempre lo stesso e nasce dalla tesi di dottorato del matematico tedesco Bernhard Riemann presentata nel 1851. Ormai è assolutamente centrale in svariati ambiti della matematica e ogni matematico deve averlo bene in mente.

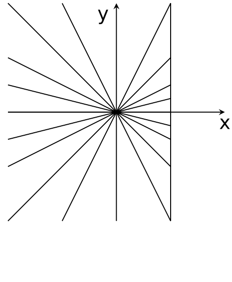
Vediamo un esempio notevole. Consideriamo l'insieme X di tutte le rette del piano passanti per l'origine. Queste rette sono della forma

$$r_m : y = mx$$

tranne la retta

$$r_\infty : x = 0$$

che coincide con l'asse y. L'insieme X ha dunque come punti le rette di questo tipo. Le rette del tipo $y = mx$ sono in corrispondenza biunivuca con $\mathbb{R}$ poiché per ogni valore di m abbiamo una retta diversa. Dunque X sarà la retta reale $\mathbb{R}$ con in aggiunta un punto, detto punto all'infinito, corrispondente alla retta $x = 0$. Graficamente possiamo vederlo in questo modo:



Tutte le rette per l'origine intersecano una e una sola volta la retta di equazione $x = 1$ tranne l'asse y che è parallelo ad essa e quindi la incontrerà soltanto all'infinito. L'insieme X coincide dunque con la retta x = 1 alla quale bisogna aggiungere però un ulteriore punto. X si chiama retta proiettiva e viene denotata con il simbolo $\mathbb{P}^1$. Su di essa è ragionevole considerare la topologia di Zariski prendendo dunque come insiemi chiusi quelli formati da un numero finito di punti. Vogliamo vedere che $\mathbb{P}^1$ è una varietà topologica di dimensione 1. In questo caso si tratterà più precisamente di una varietà algebrica.

Prendiamo un atlante formato solo da due carte

$$U_1 = \mathbb{P}^1 - \{r_\infty\}$$

e

$$U_2 = \mathbb{P}^1 - \{r_0\}.$$

Dunque U_1 è l'insieme di tutte le rette per l'origine tranne $r_\infty : x = 0$, mentre U_2 è l'insieme di tutte le rette per l'origine tranne $r_0 : y = 0$. Evidentemente si tratta di due aperti poiché i complementari sono formati da un solo punto e la loro intersezione è

$$U_1 \cup U_2 = \mathbb{P}^1 - \{r_\infty, r_0\}.$$

Abbiamo in pratica già visto che U_1 è omeomorfo alla retta $x = 1$. Se escludiamo la retta coincidente con l'asse delle y, in effetti, la corrispondenza è uno ad uno. Perché sia continua e abbia inversa continua dobbiamo considerare anche la retta $x = 1$ con la topologia di Zariski. Avremo dunque

$$f_1(r_m) = (1, m) = m \in \mathbb{R}.$$

Il punto (1,m) è infatti il punto di intesezione tra r_m e la retta $x = 1$ ma, pensato sulla retta stessa, è semplicemente m $\in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda U_2 invece dobbiamo interscambiare il ruolo di x e y e ripetere la stessa costruzione con la retta $y = 1$. In questo caso la retta $r_\infty : x = 0$ intersecherà la retta $y = 1$ nel punto (0, 1) e, per ogni altra retta $r_m : y = mx$ con $m \neq 0$, l'intersezione si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = mx \\ y = 1 \end{cases}$$

Facendo i conti si trova il punto (1/m, 1). Ricapitolando

$$f_2(r_\infty) = (0,1) = 0 \in \mathbb{R},$$

e

$$f_2(r_m) = (1/m, 1) = 1/m \in \mathbb{R}.$$

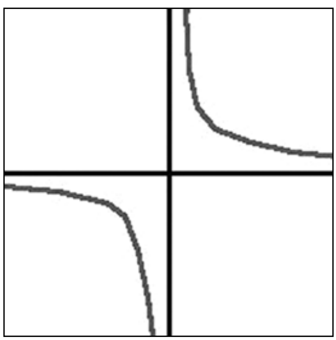
A questo punto vediamo che

$$f_1(U_1 \cup U_2) = f_2(U_1 \cup U_2) = \mathbb{R} - \{0\}$$

e la funzione di transizione è

$$\psi_{12} = f_1^{-1} \circ f_2 : \begin{array}{ccc} f_1(U_1 \cup U_2) \subset \mathbb{R} & \to & f_1(U_2 \cup U_2) \subset \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \frac{1}{m} \end{array}$$

Infatti $f_1^{-1}(m) = r_m$ e $f_2(f_1^{-1}(r_m)) = f_2(r_m) = 1/m$. Si tratta dunque di un'iperbole che è una funzione continua da $\mathbb{R}$ –{0} in se stesso poiché il punto 0, che crea problemi, non fa parte del dominio.



La funzione inversa ψ_{21} è anch'essa un'iperbole e dunque continua.

In modo analogo si definisce il piano proiettivo. Si considerano tutte le rette dello spazio tridimensionale passanti per l'origine. Si osserva che esse intersecano tutte il piano $z = 1$, ovvero il piano parallelo al piano xy a quota 1, una e una sola volta tranne quelle che appartengono al piano xy. Quelle del piano xy le abbiamo già viste in azione e sappiamo che formano una retta proiettiva. Il piano proiettivo, denotato con $\mathbb{P}^2$, si può dunque vedere come un piano a cui bisogna aggiungere una retta proiettiva. Si ha un piano con in aggiunta una retta e un punto all'infinito. Sul piano proiettivo finalmente anche le rette parallele si incontrano. Ogni punto della retta che abbiamo aggiunto, infatti, indica proprio una delle infinite inclinazioni che possono avere due rette parallele in un piano. $\mathbb{P}^2$ è molto utile dunque per molti studi di carattere geometrico e ha anch'esso struttura di varietà algebrica questa volta di dimensione 2. Questa volta ci sarà bisogno di tre carte scambiando il ruolo delle variabili come abbiamo fatto per la retta proiettiva. In modo simile si definiscono $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$ e così via. Ogni $\mathbb{P}^n$ è una varietà algebrica di dimensione n.

Dio è amore

Ora vogliamo provare a paragonare il mistero trinitario, che è più complesso di come potrebbe essere far entrare il mare in una buca nella sabbia, a uno spazio topologico molto astratto e impalpabile. Esso però lo vogliamo pensare con una struttura di varietà topologica in quanto è localmente omeomorfo ai piccoli e bisognosi della terra. Abbiamo visto nel brano di Matteo che Gesù si identifica molto concretamente in chi ha fame o sete, in chi è nudo, malato, straniero o in carcere. Quel guardare contemporaneamente, dalla cappella della casa di Nirmal Hriday, gli ospiti della struttura e Cristo-Eucarestia ci dice che, localmente, in quella particolare circostanza, Dio si riesce a identificare con questi poveri. L'unico modo per capire qualcosa del cuore di Dio è dunque amare e servire.

Sant'Agostino sintetizza questo con la famosa ed efficacissima frase:

> Ama e fa' ciò che vuoi.