I Delfini

Iscriviti alla newsletter su www.lindau.it per essere sempre aggiornato su novità, promozioni ed eventi.
Riceverai in omaggio un racconto in eBook tratto dal nostro catalogo.

In copertina: abaco antico, © fotofabrika, istock

corso Re Umberto 37 - 10128 Torino

Prima edizione: ottobre 2020
ISBN 978-88-3353-465-7

Francesco Malaspina

SETTE SEMPLICI LEZIONI DI MATEMATICA

d'amore, morte, calcio, meringhe

e geometria

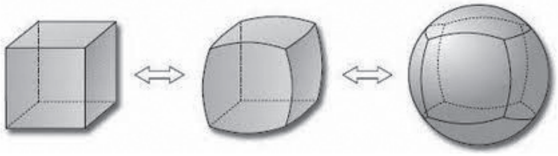
LINDAU

Sesta lezione

Geometria della gomma

In questa penultima lezione entrerà in scena la *topologia*, un settore della matematica dove tutto è permesso, tranne fare buchi e spezzare manici. È una sorta di geometria senza le forme, dove gli spigoli e le asperità del carattere vengono smussati, come avviene nelle storie d'amore, e una tazza può diventare una ciambella per completare la colazione.

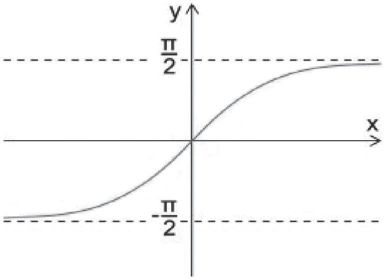
Non importa se avete i piedi quadrati, potete comunque provare a tirare in porta perché anche il pallone da gioco è come se avesse una forma cubica, e la porta avversaria è disposta a prendere forme improbabili per accogliere la vostra sbilenca traiettoria.



È possibile parlare di continuità anche senza avere una distanza tra i punti. Gli *intorni* si possono dare in modo assiomatico purché abbiano un buon comportamento rispetto a unione e intersezione (si veda il libro di Marco Andreatta *La forma delle cose. L'alfabeto della geometria*). Anche senza coordinate è possibile orientarsi e quando non è possibile è sempre colpa di un nastro di Möbius. Qui sotto abbiamo una delle tante sculture che lo scultore, architetto e pittore svizzero del XX secolo Max Bill ha voluto dedicare a questa affascinante superficie.

Si può ottenere incollando i lati corti di una striscia rettangolare dopo aver compiuto una torsione, ovvero invertendo i due vertici. Sembra che questi nastri abbiano due facce, ma in realtà si tratta della stessa. Camminando sul nastro, partendo da un punto qualsiasi, ci troveremmo, dopo aver compiuto un giro, nello stesso punto ma a testa in giù e, solo compiendo un secondo giro, potremmo trovarci nella situazione iniziale. In questi capovolgimenti si perde letteralmente la bussola e un'orientazione ha senso soltanto a livello locale. Le superfici non orientabili sono tutte e sole quelle che contengono un nastro di Möbius.

Anche in questo contesto ritroviamo oggetti visti durante le scuole, rivisitati per darci informazioni insospettabili. Probabilmente ci siamo annoiati nello studiare le funzioni trigonometriche. Le funzioni periodiche sinusoidali legate alle onde sonore hanno varie regole di calcolo non facili da memorizzare. Il rapporto tra la funzione seno e la funzione coseno definisce la tangente. Vediamo qui di seguito il grafico della sua funzione inversa, detta *arcotangente*:



Le rette $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$ sono due asintoti orizzontali, perciò il codominio, ovvero la proiezione del grafico sull'asse y di questa funzione, è il segmento aperto (ovvero con gli estremi esclusi) che va da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, mentre il dominio è tutta la retta reale. Inoltre, se consideriamo la funzione

$$y = \frac{2}{\pi} \arctan x$$

otteniamo come asintoti orizzontali le rette $y = -1$ e $y = 1$. Cambiando il coefficiente davanti all'arcotangente, posso mutare a mio piacimento gli asintoti e far diventare il codominio un segmento aperto piccolo quanto voglio. Sia la funzione cotangente che la sua funzione inversa sono continue. Nel mondo della topologia, il codominio e il dominio di una funzione biunivoca, continua e con inversa continua, sono considerati la stessa cosa. L'accento non si mette più sulla curva, ma sulle sue proiezioni sugli assi cartesiani, che vengono assimilate. Posso stiracchiare infinitamente un piccolo segmentino fino a ricoprire l'intera retta reale. Usando ancora terzine dantesche, potremmo dire:

Guarda il grafico di un'arcotagente
che essendo bicontinua e biiettiva
tra l'infinita retta dei reali

e una sua parte degli estremi priva
ci spiega che possiam pensare uguali
tutti i segmenti aperti e l'infinito.

Fiorella Mannoia, nella canzone *Che sia benedetta*, presentata al festival di Sanremo 2017, dice: «In questa piccola parentesi infinita». Si accosta qualcosa di limitato e locale come una piccola parentesi a qualcosa di illimitato e senza fine.

Con la notazione $(-1{,}1)$ si indica un intervallo aperto, ovvero senza i punti -1 e 1, e le parentesi tonde hanno proprio il significato di escludere i punti estremi (mentre le quadrate li includerebbero). Tra queste due parentesi si ha dunque un breve segmento che però, topologicamente, è come tutta la retta, ricordando la piccola parentesi infinita evocata dalla Mannoia

Tornando alla canzone *Viceversa* di Francesco Gabbani, troviamo: «E tutto l'universo chiuso in una stanza». È chiaro il riferimento al *Cielo in una stanza* di Gino Paoli. L'incontro con la persona amata, pur essendo un'esperienza circoscritta e limitata, dà la sensazione che le pareti scompaiano, sostituite da alberi infiniti, e il soffitto diventi un cielo sconfinato. In effetti nella vita ci sono incontri che danno un senso diverso all'intera esistenza. Il momento dell'incontro con la persona che diventerà la compagna di una vita in qualche modo si dilata infinitamente. È il profumo di eternità che si respira quando ci si sceglie. È una dimensione senza fine sia dal punto di vista spaziale, rendendo possibile il fatto che tutto l'universo entri in una stanza, sia dal punto di vista temporale.

Quell'istante evidentemente condizionerà tutta la vita futura, ma avrà un'incidenza anche su quella passata, poiché ognuno può rileggere tutta la propria storia in funzione o comunque alla luce di quell'evento. L'incontro con la persona alleata per la vita è davvero un faro che illumina sia davanti che dietro. Tutto acquista una luce nuova e diversa e l'istante piccolo quanto si vuole viene stiracchiato fino a coprire l'intera esistenza. Lasciamolo dire anche a Jovanotti:

So che è successo già
Che altri già si amarono
Non è una novità
Ma questo nostro amore è
Come musica
Che non potrà finire mai
Che non potrà finire mai
Mai, mai. [1]

Per quanto una storia d'amore possa apparire simile a tante altre, con essa nasce una musica nuova, mai udita prima e destinata a un orizzonte al quale non è previsto un termine. In senso figurato possiamo vedere i due rami dell'arcotangente che si protendono verso gli asintoti come due braccia spalancate capaci di avvolgere in un abbraccio l'intero universo.

Ora ampliamo ulteriormente lo spazio costituito dalla retta reale. Nel corso della seconda lezione abbiamo accennato a una scala mobile che ingurgita gradini per poi risputarli in un movimento circolare. Si ha la sensazione di avere gradini sempre nuovi in un ciclo senza fine.

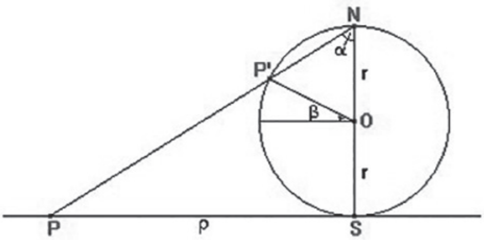
[1] Jovanotti, *Come musica* (2008).

In effetti una circonferenza, o comunque una curva chiusa, la si può immaginare come una retta infinita nella quale vengono incollati gli estremi. È come se, in un tempo eterno, l'infinitamente passato e l'infinitamente futuro coincidessero. Quest'idea è presente in diverse suggestioni fantascientifiche. Nel romanzo *Terra!* di Stefano Benni, del 1983, si racconta una storia ambienta nel 2156 nella quale un viaggio verso il futuro per salvare il pianeta si conclude agli albori della civiltà. Due dei personaggi, uno in viaggio verso un buco nero che lo porterà nel passato e l'altro impegnato a decifrare un codice misterioso in Perù, riusciranno a usare le loro comuni conoscenze per unire le due avventure in una sola.

Al di là della fantascienza, siamo tutti affascinati dalle teorie fantasiose che ritengono che le soluzioni di insoluti misteri delle piramidi egizie o dei templi Maya vadano a ricercarsi in tecnologie appartenenti a un lontano futuro. Spingendo all'infinito questa suggestione, ecco che il cerchio si chiude. Più localmente, pensiamo a certi amori, cantati da Antonello Venditti, che «non finiscono ma fanno dei giri immensi e poi ritornano».

Dal punto di vista matematico, per vedere che una retta con gli estremi incollati è paragonabile a una circonferenza si può usare la *proiezione stereografica*. Esiste anche una versione in dimensione maggiore, nota già nel II secolo a.C., nella quale una sfera è proiettata su un piano. È stata utilizzata per la costruzione, da parte di Ipparco, dell'astrolabio, l'affascinante strumento astronomico in grado di localizzare la posizione di corpi celesti come Sole, Luna, pianeti e stelle. Con una costruzione analoga, si possono proiettare su un piano anche altri oggetti solidi, e per questo è importante in geologia e mineralogia.

Vediamo però nei dettagli soltanto il caso della circonferenza e la retta. Appoggiamo la circonferenza sulla retta e chiamiamo S il punto di contatto. Ora consideriamo la proiezione dal punto N diametralmente opposto a S.



È come se avessimo una torcia nel punto N che illumina la circonferenza, e per ogni punto diverso da N consideriamo la sua ombra sulla retta. Detto in modo più geometrico, stiamo associando a ogni punto P′ diverso da N sulla circonferenza il punto P di intersezione tra la retta per P′ e N e la retta orizzontale. Il punto S sarà l'unico associato a sé stesso, mentre più P′ è vicino a N dal lato destro più la proiezione sarà vicina a $+\infty$ e dal lato sinistro a $-\infty$.

Inoltre questa proiezione stereografica è una corrispondenza biunivoca continua (in quanto manda punti vicini in punti vicini) tra una circonferenza, tranne un punto e una retta. Anche la funzione inversa, che a ogni punto P sulla retta associa l'intersezione tra la retta per N e P e la circonferenza, è una funzione continua. Insomma, in topologia, tramite un'arcotangente, un segmento aperto piccolo quanto si vuole può essere assimilato a un'intera retta e quest'ultima tramite la proiezione stereografica equivale a una circonferenza tranne un punto. Aggiungiamo alla retta un punto supplementare ∞ che associamo al punto N della circonferenza. La retta per N e P′, quando N e P′ coincidono, è la retta tangente alla circonferenza in N, che è quindi orizzontale ed è parallela alla mia retta orizzontale di partenza.

Abbiamo sempre sentito dire che due rette parallele non si incontrano mai, o meglio si incontrano solo all'infinito. In questo nuovo spazio l'infinito è un punto vero e proprio e non semplicemente un ideale cui tendere. Tramite la proiezione stereografica, i punti vicini al punto N sulla circonferenza vengono associati al remoto passato o al lontano futuro, e questo nuovo punto ∞ è quindi vicino sia a $+\infty$ che a $-\infty$. L'infinitamente lontano è diventato infinitamente prossimo. Abbiamo compattificato la retta senza fine incollando, attraverso un punto aggiuntivo, le due estremità. Laddove non c'era né un inizio né una fine ora queste due sfuggenti entità sono legate grazie a un punto fuori dal tempo. Una circonferenza non potrà essere mai come una retta perché la prima, anche se è una curva chiusa alla quale non è stato tolto nessun punto a differenza del segmento aperto, è limitata, mentre la seconda non lo è. Una retta è come la fantasia, non la puoi rinchiudere in una gabbia: un quadrato, per quanto lungo sia il suo lato, non riuscirà mai a contenere un'intera retta. Potrà invece contenere una circonferenza, se il suo lato è lungo più del diametro. Un altro motivo per cui non sono assimilabili è che, se tagliassimo una retta in un punto con un paio di forbici, in qualunque posizione, la divideremmo in due parti (due semirette), mentre una circonferenza tagliata in un qualunque punto resterebbe tutta d'un pezzo. Abbiamo visto però che la retta è come una circonferenza a cui togliamo un punto. La circonferenza tutta intera, invece, la si può ottenere annodando gli estremi di una retta, che estremi non ha per definizione, in un punto aggiuntivo inimmaginabile.

Nel libro *La storia infinita* di Michael Ende, di cui molti ricorderanno la versione cinematografica (non troppo fedele al romanzo), l'infinito è espresso meravigliosamente in modo circolare. L'undicenne goffo e grassoccio Bastiano trafuga un libro misterioso e si mette a leggerlo nella soffitta della sua scuola. Segue con avidità le avventure del coetaneo Atreiu nel paese di Fantàsia minacciato dal Nulla. Ad un certo punto si rende conto di essere un protagonista del libro stesso, e addirittura di essere l'unico in grado di salvare l'Infanta Imperatrice gravemente malata. La sua titubanza a intervenire indurrà il Vecchio della Montagna Vagante a rileggere la storia. Il libro ricompare dentro sé stesso e il vecchio comincia a leggere partendo dal momento in cui Bastiano si impossessa del libro. Arrivando alla fine ritrova sé stesso che legge e ricomincia ancora. Questa spirale infinita e frattale viene interrotta da Bastiano, che decide di frantumare la quarta parete dando un nuovo nome all'Infanta Imperatrice (Fiordiluna) approdando così a Fantàsia.

Compare a questo punto il seguente dialogo:

> «Fiordiluna» balbettò Bastiano stordito «adesso sei davvero guarita?».
> Lei sorrise.
> «Non lo puoi vedere, Bastiano mio?».
> «Vorrei che tutto restasse in eterno com'è in questo momento», esclamò lui.
> «Il momento è eterno» rispose Fiordiluna.

In questo momento eterno ritroviamo l'arcotangente che riusciva ad accomunare topologicamente un piccolo istante e il tempo eterno. Nell'intera vicenda ritroviamo, però, la circonferenza nella quale inizio e fine sono legati. Bastiano dovrà poi percorrere un lunghissimo cammino, seguendo i desideri, per tornare a casa. Ci sarà un percorso discendente partendo dal punto N della nostra figura verso un punto più basso S, in cui sarà tentato ad autoproclamarsi imperatore, e poi un percorso di purificazione ascendente ancora verso N.

Infine, si troverà nuovamente nella soffitta della sua scuola. Certo, nella proiezione stereografica l'inizio e la fine sono $-\infty$ e $+\infty$, quindi sfuggenti, mentre in questa storia appaiono ben definiti. Abbiamo però sottolineato più volte come dal finito riusciamo a cogliere qualcosa dell'infinito. Inoltre, il medaglione che prima Atreiu e poi Bastiano portano al collo, che è la chiave di tutto e nella nostra metafora paragoniamo al punto aggiuntivo fuori dal tempo, raffigura due serpenti che si mordono la coda, a richiamare una circonferenza e la fine che si lega al principio.