ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA 2024

Prova scritta di Topologia (Appello del 06.02.2024.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{R}$ la topologia $\tau' = \tau_{\mathcal{B}}$ associata alla base $\mathcal{B} = \{(-a \quad b] | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ e la topologia cofinita τ_c. Si consideri la topologia prodotto su $X = \mathbb{R}^2$

$$\tau = \tau_{\tau' \times \tau_c}.$$

(1) Si dica se (X, τ) è di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = y$. Si dica se f è continua, aperta o chiusa.
(3) Sia $A = (0 \quad 1]$, si trovi la chiusura di $W = A \times A$ in X.

Soluzione:

(1) (X, τ) non è di Hausdorff $(\mathbb{R}, \tau_c)$ non lo è (tutti gli aperti non vuoti in τ_c si intersecano). (X, τ) non è connesso poiché $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ non lo è (è totalmente sconnesso) e non è compatto poiché $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ non lo è ($\{((-a \quad \infty)\}_{a \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito).
(2) Gil aperti della base di τ sono della forma $V = (a \quad b] \times \mathbb{R} - \{p_1, \dots p_s\}$. Se $U = (a \quad b)$ è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U) = \mathbb{R} \times (a \quad b)$ che non può essere unione di aperti di tipo V e quindi non appartiene a τ. Dunque f non è continua. f è aperta in quanto $f(V) = \mathbb{R} - \{p_1, \dots p_s\}$ che è un aperto nella topologia euclidea di $\mathbb{R}$. f è chiusa infatti se C è un chiuso non vuoto di $(\mathbb{R}^2, \tau)$ allora $f(C)$ è formato da un numero finito di punti oppure è tutto $\mathbb{R}$ ed è dunque in entrambi i casi un chiuso in $(R, \mathcal{E}_1)$.
(3) $\overline{W} = A \times \mathbb{R}$. Infatti $A_1 = (-\infty \quad 0] = \cup_{a \in \mathbb{N}}(-a \quad 0] \in \tau_{\mathcal{B}}$ e $A_2 = (1 \quad \infty) = \cup_{b \in \mathbb{N}}(1 \quad b] \in \tau_{\mathcal{B}}$ quindi $A = \mathbb{R} - (A_1 \cup A_2)$ è un chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$. Inoltre il più piccolo chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ che contiene A è tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 2\}$ con la topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$.

(1) Si trovi frontiera di W in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si trovino le componenti connesse di W.
(3) Si trovi una successione di Cauchy che non sia convergente in W.

Soluzione:

(1) $Fr(W) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2\}$.

(2) Le componenti connesse sono $A_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = q\}$ con $q \in (1 \quad 2) \cap \mathbb{Q}$. Infatti A_q è connesso essendo omeomorfo a $\mathbb{R}$ ma $(q', y) \cup A_q$ con $(q', y) \in W$ e $q' \neq q$ non lo è (basta considerare $q' < q$ e un irrazionale r compreso tra q' e q e si ottiene che $W \cap (1 \quad r) \times \mathbb{R}$ e $W \cap (2 \quad 2) \times \mathbb{R}$ sono due aperti di W che sconnettono $(q', y) \cup A_q$.)

(3) Si consideri la successione $\{(1 + \frac{1}{n+1}, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 3. (10 punti)

Si consideri su $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea τ_e il sottoinsieme $A = \{x \in R | -1 < x < 1\}$ e la relazione di equivalenza $x \rho x'$ se e solo se $x = x'$ oppure $x, x' \in A$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ è di Hausdorff, connesso e compatto.

(2) Si mostri che non può esistere un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ e

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

(1) X è connesso quindi anche $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ lo è .
$(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ non è T_2 poiché tutti gli intorni saturi di 0 contengono A e quindi nessun intorno saturo di 1 è disgiunto da un intorno saturo di 0.
$(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ non è compatto, infatti $\{A_a = (-a \quad a)\}_{a>1}$ è un ricoprimento di aperti saturi di X dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Di conseguenza $\{\pi(A_a)\}_{a>1}$ è un ricoprimento di aperti di $\frac{X}{\rho}$ dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

(2) Se $\frac{X}{\rho}$ fosse omeomorfo a S^1 allora $\frac{X}{\rho} - \{[0]\}$ dovrebbe essere omenomorfo a $S^1 - \{p\}]$ dove p e' un qualche punto di S^1. Ma $[0] = A$ ed è l'unica classe di equivalenza formata da più di un punto. Quindi $\frac{X}{\rho} - \{[0]\}$ è omeomorfo a $(-\infty \quad -1] \cup [1 \quad +\infty)$ che è sconnesso mentre $S^1 - \{p\}$ è connesso.

Prova scritta di Topologia (Appello del 23.02.2024.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}$. Si considerino su $\mathbb{R}$ la base $\mathcal{B}$ formata dai sottoinsiemi $A_a = (-a \quad a)$ con $a > 0$. Sia $\tau' = \tau_{\mathcal{B}}$ la topologia associata a $\mathcal{B}$ e τ_c la topologia cofinita. Si consideri la topologia prodotto su $X = \mathbb{R}^2$

$$\tau = \tau_{\tau' \times \tau_c}.$$

(1) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e la funzione $f : \mathbb{R} \to X$ con $f(t) = (t, 1)$. Si dica se f è continua, aperta o chiusa.
(3) Siano $A = \{(0, 0)\}$, $C = \{(1, 0)\}$ e si trovino le loro chiusure.

Soluzione:

(1) X non è di Hausdorff ed è connesso poiché tutti gli aperti non vuoti si intersecano. X non è compatto in quanto gli aperti di $\{(-a \quad a) \times \mathbb{R}\}_{a\in\mathbb{N}}$ formano un ricoprimento di X dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.
(2) Gil aperti di una base di τ sono della forma $V = (-a \quad a) \times \mathbb{R} - \{p_1, \dots p_s\}$, $f^{-1}(V) = (-a \quad a)$ se $1 \in \mathbb{R} - \{p_1, \dots p_s\}$ oppure $f^{-1}(V) = \emptyset$ se $1 \notin \mathbb{R} - \{p_1, \dots p_s\}$.In entrambi i casi si ottiene un aperto euclideo, dunque f è continua. f è chiusa, infatti se $C = [a \quad b]$ è un intervallo chiuso in $\mathbb{R}$, $f(C) = [a \quad b] \times \{1\}$ che non è un chiuso nella topologia τ.
(3) $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$, $\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, |x| \geq 1\}$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $D = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} | b = c = 0\}$ l'insieme delle matrici diagonali 2×2 a coefficenti reali, si consideri in $D \times D$ la seguente funzione d:

$$d(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (d_1 - d_2)^2}.$$

Sia inoltre $W = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in D | 0 \leq a < 1\}$.

(1) Si dimostri che d e' una distanza.
(2) Si trovi la frontiera di W in D.
(3) Si dica se lo spazio metrico (W, d) è completo.

Soluzione:

(1)

$$d(M_1, M_2) = d(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}) =$$
$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2, d_1 = d_2 \Leftrightarrow M_1 = M_2.$$

$$d(M_1, M_2) = d(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}) =$$
$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (d_2 - d_1)^2} = d(M_2, M_1)$$

$$d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} + \sqrt{(a_3 - a_2)^2 + (d_3 - d_2)^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{(a_1 - a_3)^2 + (d_1 - d_3)^2} = d(M_1, M_3).$$

(2) Se consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea d_e, la funzione $f : D \to \mathbb{R}^3$ con $f(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) = (a, d)$ risulta essere un'isometria. Attraverso essa D risulta essere isometrico a $(\mathbb{R}^2, d_e)$. W risulta dunque isometrico a $\{(a.d) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq a < 1\}$ la cui frontiera in $\mathbb{R}^2$ è $\{(a.d) \in \mathbb{R}^2 | a = 0\} \cup \{(a.d) \in \mathbb{R}^2 | a = 1\}$. Possiamo quindi dedurre che $Fr(W) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in D | a = 0\} \cup \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in D | a = 1\}$.

(3) (W, d) non è completo. Si consideri infatti la successione di matrici di W $\{\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}_{n \in \mathbb{N}}$ che è di Cauchy ma non è convergente in W.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri su $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea τ_e il sottoinsieme $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1, x \geq 1\}$ e la relazione di equivalenza $x \rho x'$ se e solo se $x = x'$ oppure $x, x' \in A$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ è di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ e
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$
con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

(1) X è connesso quindi anche $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ lo è .
$(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ è T_2. Infatti, siano $x, x' \in X$ non equivalenti. Possiamo supporre $x < x'$ e $x' \in (-1 \quad 1)$ (il caso $x \in (-1 \quad 1)$ si svolge in caso analogo). Consideriamo $h_1 = min\{\frac{|-1+x'|}{2}, \frac{|x+x|'}{2}\}$, $h_2 = \frac{|x'+1|}{2}$ e osserviamo l'intorno di x,
$$A_1 = (-\infty \quad x' - h_1) \cup (x' + h_2 \quad +\infty)$$
è saturo poiché $A \subset A_1$ e l'intorno di x',
$$A_2 = (x' - h_1 \quad x' + h_2)$$

è saturo poiché $A \cap A_2 = \emptyset$. Inoltre A_1 e A_2 sono disgiunti e quindi separano x e x'.
$\pi([-2 \quad 2]) = \frac{X}{\rho}$ quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ è compatto essendo immagine di un compatto.

(2) Consideriamo la funzione $f : X \to Y$ definita nel seguente modo: $f(x) = (1, 0))$ se $x \in A$ e $f(x) = (cos(\pi(x + 1)), sen(\pi(x + 1)))$ se $x \notin A$. f è continua poiché $\lim_{x\to-1^+} cos(\pi(x + 1)) = \lim_{x\to1^-} cos(\pi(x + 1)) = 1$ e $\lim_{x\to-1^+} sen(\pi(x + 1)) = \lim_{x\to1^-} sen(\pi(x + 1)) = 0$. Inoltre f è suriettiva e totalmente compatibile (infatti $f(x) = f(x') \Leftrightarrow f(x) = (1, 0) = f(x') \Leftrightarrow x, x' \in A$ oppure $x = x'$). Infine essendo $\frac{X}{\rho}$ compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia (Appello del 13.05.2024.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}$. Si considerino su $X = \mathbb{R}^2$ i sottoinsiemi $A_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y < a\}$ e la famiglia

$$\mathcal{B} = \{A_a | a \geq 0\}.$$

(1) Si mostri che $\mathcal{B}$ e' la base di una topologia τ.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Siano $A = \{(0, 0)\}$, $C = \{(1, 0)\}$ e si trovino le loro chiusure.

Soluzione:

(1) $X = (\cup_{a \geq 0} A_a)$. Se $A_a, A_b \in \mathcal{B}$ anche $A_a \cap A_b = A_{\min\{a,b\}} \in \mathcal{B}$.
(2) X non è di Hausdorff ed è connesso poichè tutti gli aperti non vuoti si intersecano. X non è compatto in quanto gli elementi di $\mathcal{B}$ formano un ricoprimento di X dal quale non e' possibile estrarre un sottoricoprimento finito.
(3) $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\} = \overline{C}$.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 || x| + |y| \geq 1\}$ con la topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$ e il sottoinsieme $W = \{(x, y) \in V | y \geq 0\}$. Trovare la frontiera di W in V e la frontiera di W in tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:
$Fr(W) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x \leq -1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1\}$ in V.
$Fr(W) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x < -1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, |x| + |y| = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri l'insieme $X = \mathbb{N}$, con topologia τ indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$. In X si consideri il sottoinsieme $A = \mathbb{N} - \{5\}$ e la relazione di equivalenza $x' \rho x''$ se e solo se $x' = x''$ oppure $x', x'' \in A$.

(1) Si mostri che $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è di Hausdorff e compatto ma non connesso.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e

$$Y = \{x \in \mathbb{Z} | 1 = |x - 1|\}$$

con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) Siano x', x'' non equivalenti, allora uno dei due deve essere diverso da 5. Possiamo assumere $x' = 5, x'' \neq 5$. $D = \{5\}$, $B = \mathbb{N} - \{5\}$ sono due aperti saturi disgiunti con $x' \in D, x'' \in B$ quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è di Hausdorff. Osserviamo inoltre che $\pi(D)$ e $\pi(B)$ sconnettono $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$. Infine l'insieme $\{5, 1\}$ è compatto in X avendo solo due punti e $\pi(\{5, 1\}) = \frac{X}{\rho}$; quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è compatto.

(2) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x) = 0$ se $x \neq 5$ e $f(5) = 2$ e' continua (poiche' τ è la topologia discreta), suriettiva e totalmente compatibile (infatti $f(x') = f(x'') \Leftrightarrow x' = x'' = 5$ oppure $x', x'' \in A$).
Infine, essendo la topologia indotta su Y da quella euclidea ancora la topologia discreta, si ha che f manda aperti saturi in aperti. La funzione sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' dunque un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia (Appello del 18.06.2024.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{R}$ la topologia discreta τ_d e su $\mathbb{R}^2$ la topologia euclidea τ_e. Si consideri la topologia prodotto su $X = \mathbb{R}^3$

$$\tau = \tau_{\tau_d \times \tau_e}.$$

(1) Si dica se (X, τ) è di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si consideri $\mathbb{Z}$ con la topologia $\tau' = \{A \subset \mathbb{Z} | 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$ e la funzione $f : \mathbb{Z} \to X$ con $f(t) = (0, t, t)$. Si dica se f è continua o aperta.
(3) Si trovi la chiusura di $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 < x < 3, y^2 + z^2 < 1\}$.

Soluzione:

(1) (X, τ) è di Hausdorff poiché $(\mathbb{R}, \tau_d)$ e $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ lo sono. (X, τ) non è connesso e non è compatto poiché $(\mathbb{R}, \tau_d)$ non è compatto e non è connesso.
(2) f non è continua, infatti $C = \{(0, 0, 0)\}$ è un chiuso in τ (il suo complementare è $\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ che è prodotto di aperti, oppure si puó semplicemente osservare che, essendo lo spazio di Hausdorff, gli insiemi formati da un solo punto sono dei chiusi) ma $f^{-1}(C) = \{0\}$ che non è un chiuso contenendo 0. f non e' aperta infatti $A = \{(0)\}$ è un aperto di $(\mathbb{Z}, \tau')$ ma $f(A) = \{(0, 0, 0)\}$ non è un aperto in (X, τ).
(3) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 < x < 3, y^2 + z^2 < 1\} = (1 \quad 3) \times \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | y^2 + z^2 < 1\}$ quindi $\overline{W} = (1 \quad 3) \times \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Esercizio 2. (7 punti)
Sia $V = \{ax + b \in \mathbb{R}[x]_1 | a^2 + b^2 \leq 1\}$ l'insieme dei polinomi in una variabile su $\mathbb{R}$ di grado al più 1 i cui coefficienti appartengono al disco unitario chiuso. Si consideri la consueta metrica d:

$$d(a_1 x + b_1, a_2 x + b_2) = max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|\}.$$

(1) Si trovi la frontiera di V.
(2) Si dica se lo spazio metrico (V, d) e' completo.

Soluzione:

(1) Se consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la metrica d_∞ che è equivalente alla metrica euclidea, la funzione $f : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}^2$ con $f(ax + b) = (a, b)$ risulta essere un'isometria. Attraverso essa V risulta essere isometrico a $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a^2 + b^2 \leq 1\}$ la cui frontiera in $\mathbb{R}^2$ risulta essere $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a^2 + b^2 = 1\}$. Possiamo concludere che $Fr(V) = \{ax + b \in \mathbb{R}[x]_1 | a^2 + b^2 = 1\}$.
(2) Osserviamo che $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a^2 + b^2 \leq 1\}$ è compatto e di conseguenza lo è anche V che è omeomorfo. Quindi (V, d) e' completo.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri su $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq y \leq 2\}$ con topologia euclidea τ_e il sottoinsieme $A = \{(x,y) \in X | 0 < x < 1\}$ e la relazione di equivalenza $(x,y)\rho(x',y')$ se e solo se $(x,y) = (x',y')$ oppure $(x,y),(x',y') \notin A$ e $y = y'$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ è di Hausdorff, compatto e connesso.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ e

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^3$.

Soluzione:

(1) X è connesso quindi anche $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ lo è .
$(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ è T_2. Infatti, siano $(x,y),(x',y') \in X$ non equivalenti.
Se $x = x'$ e $y \neq y'$ basta considerare i semipiani inferiore e superiore al punto medio tra y e y'. Possiamo ora supporre $x < x'$ e $x \in (0 \quad 1)$ (il caso $x' \in (0 \quad 1)$ si svolge in caso analogo). Consideriamo $h_1 = min\{\frac{x+1}{2}, \frac{x+x'}{2}\}$, $h_2 = \frac{x}{2}$ e osserviamo che l'intorno di x',

$$A_1 = (-\infty \quad x - h_2) \cup (x + h_1 \quad +\infty) \times \mathbb{R}$$

è saturo poiché $\mathbb{R}^2 - A \subset A_1$ e l'intorno di x,

$$A_2 = (x - h_2 \quad x + h_1) \times \mathbb{R}$$

è saturo poiché $(\mathbb{R}^2 - A) \cap A_2 = \emptyset$. Inoltre A_1 e A_2 sono disgiunti e quindi separano x e x'.
$\pi([-1 \quad 1] \times [1 \quad 2]) = \frac{X}{\rho}$ quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ è compatto essendo immagine di un compatto.

(2) Consideriamo la funzione $f : X \to Y$ definita nel seguente modo: $f(x,y) = (1, 0, y-1)$ se $(x,y) \notin A$ e $f(x,y) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x), y-1)$ se $(x,y) \in A$.
f è continua poiché $\lim_{x\to 0^+} cos(2\pi x) = \lim_{x \to 1^-} cos(2\pi x) = 1$ e
$\lim_{x\to 0^+} sen(2\pi x) = \lim_{x\to 1^-} sen(2\pi x) = 0$.
Inoltre f è suriettiva e totalmente compatibile
(infatti $f(x,y) = f(x',y') \Leftrightarrow f(x,y) = (1,0,y-1) = f(x',y') \Leftrightarrow (x,y),(x',y') \notin A$ e $y = y'$ oppure $(x,y) = (x',y')$).
Infine essendo $\frac{X}{\rho}$ compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau_e}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.