ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA 2023

Prova scritta di Topologia (Appello del 30.01.2023.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{R}$ la topologia $\tau' = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\} \bigcup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ e la topologia cofinita τ_c. Si consideri la topologia prodotto su $X = \mathbb{R}^2$

$$\tau = \tau_{\tau' \times \tau_c}.$$

(1) Si dica se (X, τ) è di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si consideri $I = [0, 1]$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$ e la funzione $f : I \to X$ con $f(t) = (0, t + 1)$. Si dica se f è continua, aperta o chiusa.
(3) Si trovi la chiusura di $W = \{(0, 0)\}$

Soluzione:

(1) (X, τ) non è di Hausdorff ed è connesso poiche' tutti gli aperti si intersecano e non è compatto poiche' $(\mathbb{R}, \tau')$ non lo e' $(\{((-\infty, a)\}_{a\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito).
(2) Gil aperti della base di τ sono della forma $A = (-\infty, a) \times \mathbb{R} - \{p_1, \dots p_s\}$. Se $a > 0$ $f^{-1}(A)$ contiene tutto I tranne al piu' un numero finito di punti ed è quindi un aperto di I, se invece $a \leq 0$ $f^{-1}(A) = \emptyset$ quindi f è continua. f non e' aperta infatti $A = (0, 1)$ è un aperto di I ma $f(A) = \{0\} \times (1, 2)$ che non è un aperto in (X, τ). f non e' chiusa infatti $C = \{0\}$ è un chiuso di I ma $f(C) = \{(0, 1)\}$ che è un solo punto e non è un chiuso in (X, τ).
(3) $\overline{W} = [0, \infty) \times \{0\}$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $\{X, \tau)$ uno spazio topologico di Hausdorff e sia $E \subset X$ finito. Mostrare che la topologia indotta τ_E è indotta da una metrica d e che $\{E, d\}$ è uno spazio metrico completo.

Soluzione:

Sia $E = \{p_1, \dots p_s\}$. Consideriamo p_1 e chiamiamo A_2 un intorno di p_1 che non contiene p_2 (esiste essendo τ di Hausdorff). Nello stesso modo definiamo $A_3, \dots, A_s$ e osserviamo che $A = A_2 \cap \dots \cap A_s$ è ancora aperto (ho intersecato un numero finito di aperti) e $A \cap E = \{p_1\}$. Quindi nella topologia τ_E $\{p_1\}$ è aperto e allo stesso modo lo sono $\{p_2\}, \dots \{p_s\}$ e abbiamo che τ_E è la topologia discreta. d è quindi la metrica discreta dunque $\{E, d\}$ è uno spazio metrico completo. Osserviamo che un insieme con un numero finito di punti è completo con qualsiasi metrica poiche' una successione che assume un numero finito di valori deve essere costante da un certo punto in poi per essere di Cauchy e quindi converge.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 2, \}$, con topologia τ indotta da quella euclidea. Indichiamo con $M(x)$ la mantissa di un numero reale x. In X si consideri la relazione di equivalenza $x\rho y$ se e solo se $M(x) = M(y)$.

(1) Si mostri che $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è connesso e compatto.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$
con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

(1) X è connesso quindi anche $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ lo è . $\pi([0, 1]) = \frac{X}{\rho}$ quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è compatto.
(2) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$ e' continua, suriettiva e totalmente compatibile
(infatti $f(x) = f(x') \Leftrightarrow (cos(2\pi x), sen(2\pi x)) = (cos(2\pi x'), sen(2\pi x')) \Leftrightarrow M(x) = M(x')$. Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

(3) Se $\frac{X}{\rho}$ fosse omeomorfo a Z allora $Z - \{0, 0\}$ dovrebbe essere omenomorfo a $\frac{X}{\rho} - [p]$ dove p e' un qualche punto di X. Ma $Z - \{0, 0\}$ e' sconnesso mentre $\frac{X}{\rho} - [p]$ e' connesso.

Prova scritta di Topologia (Appello del 17.02.2023.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}$. Si considerino su $X = \mathbb{R}^2$ i sottoinsiemi $A_a^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, |x| < a\}$ $A_a^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y < 0, |x| < a\}$, la famiglia

$$\mathcal{B} = \{(A_a^+, A_a^- | a \geq 0\}.$$

(1) Si mostri che $\mathcal{B}$ e' la base di una topologia τ.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Siano $A = \{(0, 0)\}$, $C = \{(1, 0)\}$ e si trovino le loro chiusure.

Soluzione:

(1) $X = (\cup_{a \geq 0} A_a^+) \cup (\cup_{a \geq 0} A_a^+)$. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ anche $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B}$ oppure $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

(2) X non e' di Hausdorf poiche' tutti gli aperti non vuoti che contengono $(0, 1)$ o $(0, 2)$ si intersecano. X e' sconnesso dagli aperti $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 || y \geq 0\}$ e $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y < 0\}$. X non e' compatto in quanto gli elementi di $\mathcal{B}$ formano un ricoprimento di X dal quale non e' possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

(3) $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$, $\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, |x| \geq 1\}$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $S = \{M \in \mathbb{R}^{2,2} | M =^t M$ l'insieme delle matrici simmetriche 2×2 a coefficenti reali, si consideri in $S \times S$ la seguente funzione d:

$$d(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2}.$$

(1) Si dimostri che d e' una distanza.
(2) Si dica se lo spazio metrico (S, d) e' completo.

Soluzione:

(1) $W = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} | b = c\} = \{\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} | a, c, d \in \mathbb{R}\}$. Dunque

$$d(M_1, M_2) = d(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2 \Leftrightarrow M_1 = M_2.$$

$$d(M_1, M_2) = d(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (c_2 - c_1)^2 + (d_2 - d_1)^2} = d(M_2, M_1)$$

$$d(M_1, M_2)+d(M_2, M_3) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2}+\sqrt{(a_3 - a_2)^2 + (c_3 - c_2)^2 + (d_3 - d_2)^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{(a_1 - a_3)^2 + (c_1 - c_3)^2 + (d_1 - d_3)^2} = d(M_1, M_3).$$

(2) Se consideriamo $\mathbb{R}^3$ con la metrica euclidea d_e, la funzione $f : S \to \mathbb{R}^3$ con $f(\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}) = (a, c, d)$ risulta essere un'isometria. Attraverso essa S risulta essere isometrico a $(\mathbb{R}^3, d_e)$ che e' completo. Quindi anche (S, d) e' completo.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1, |x| = 1\}$, con topologia τ indotta da quella euclidea. In X si considerino i sottoinsiemi $A = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $B = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ e la relazione di equivalenza $(x', y')\rho(x'', y'')$ se e solo se $(x', y') = (x'', y'')$ oppure $(x', y'), (x'', y'') \in A$, $(x', y'), (x'', y'') \in B$.

(1) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$
con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

(2) Si dimostri che $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ non puo' essere omeomorfo a
$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, -1 \leq x \leq 0\}$$
con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

(1) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x, y) = (cos(\pi y), sen(\pi y))$ se $x = -1$ e $f(x, y) = (cos(\pi(2 - y))), sen(\pi(2 - y)))$ se $x = 1$ e' continua
(poiche' $(cos(\pi(y)), sen(\pi(y))) = (cos(\pi(2-y)), sen(\pi(2-y)))$ se $y = 1$), suriettiva e totalmente compatibile
(infatti $f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow (cos(\pi y), sen(\pi y)) = (cos(\pi(2 - y')), sen(\pi(2 - y'))) \Leftrightarrow y = 0, y' = 0$ o $y = 1, y' = 1$). Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

(2) Se $\frac{X}{\rho}$ fosse omeomorfo a Z allora $Z - \{0, 0\}$ dovrebbe essere omenomorfo a $\frac{X}{\rho} - [p]$ dove p e' un qualche punto di X. Ma $Z - \{0, 0\}$ e' sconnesso mentre $\frac{X}{\rho} - [p]$ e' connesso.

Prova scritta di Topologia (Appello del 14.06.2023.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{R}$ la topologia discreta τ_d e la topologia cofinita τ_c. Si consideri la topologia prodotto su $X = \mathbb{R}^2$

$$\tau = \tau_{\tau_d \times \tau_c}.$$

(1) Si dica se (X, τ) è di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si consideri $\mathbb{Z}^2$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ e la funzione $f : \mathbb{Z}^2 \to X$ con $f(t) = (t, t+1)$. Si dica se f è continua, aperta o chiusa.
(3) Si trovi la chiusura di $W = \{(x, y) | x = 0, y \geq 0\}$ e $V = \{(2, 2)\}$.

Soluzione:

(1) (X, τ) non è di Hausdorff, non è connesso e non è compatto poiche' $(\mathbb{R}, \tau_c)$ non è di Hausdorff e $(\mathbb{R}, \tau_d)$ non è compatto e non è connesso.
(2) La la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$ è la topologia discreta quindi f è continua. f non e' aperta infatti $A = \{(0, 0)\}$ è un aperto di $\mathbb{Z}^2$ ma $f(A) = \{(0, 1)\}$ non è un aperto in (X, τ). f non e' chiusa infatti $C = \{(0\} \times \mathbb{Z}$ è un chiuso di $\mathbb{Z}^2$ ma $f(C) = \{(0)\} \times \mathbb{Z}$ che non è un chiuso in (X, τ).
(3) $\overline{W} = \{0\} \times \mathbb{R}$. $\overline{V} = V$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $V = \{ax + b \in \mathbb{R}[x]_1 | a^2 + b^2 = 1\}$ l'insieme dei polinomi in una variabile su $\mathbb{R}$ di grado al piu' 1 i cui coefficienti appartengono ad una circonferenza unitaria. Si consideri la consueta metrica d:

$$d(a_1 x + b_1, a_2 x + b_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

(1) Si trovi la frontiera di V.
(2) Si dica se lo spazio metrico (V, d) e' completo.

Soluzione:

(1) Se consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea d_e, la funzione $f : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}^2$ con $f(ax + b) = (a, b)$ risulta essere un'isometria. Attraverso essa V risulta essere isometrico a (S^1, d_e). Ogni punto di S^1 risulta essere di frontiera in $\mathbb{R}^2$ in quanto ogni disco centrato in esso interseca sia S^1 che $\mathbb{R}^2 - S^1$. Possiamo concludere che $Fr(V) = V$.
(2) Osserviamo che S^1 è compatto e di conseguenza lo Ã¨ anche V che è omeomorfo. Quindi (V, d) e' completo.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}$, con topologia discreta τ. In X si consideri il sottoinsieme $A = \mathbb{R} - \{0\}$ e la relazione di equivalenza $x' \rho x''$ se e solo se $x' = x''$ oppure $x', x'' \in A$.

(1) Si mostri che $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è di Hausdorff e compatto ma non connesso.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e
$$Y = \{x \in \mathbb{R} | 1 = |x|\}$$
con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) Siano x', x'' non equivalenti, allora uno dei due deve essere non nullo. Possiamo assumere $x' = 0, x'' = 0$. $A = \{0\}$, $B = \mathbb{R} - \{0\}$ sono due aperti saturi disgiunti con $x' \in A, x'' \in B$ quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è di Hausdorff. Osserviamo inoltre che $\pi(A)$ e $\pi(B)$ sconnettono $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$. Infine l'insieme $\{0, 1\}$ è compatto in X avendo solo due punti e $\pi(\{0, 1\}) = \frac{X}{\rho}$; quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è compatto.
(2) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = -1$ e' continua (poiche' τ è la topologia discreta), suriettiva e totalmente compatibile (infatti $f(x') = f(x'') \Leftrightarrow x' = x'' = 0$ oppure $x', x'' \in A$).
Infine, essendo la topologia indotta su Y da quella euclidea ancora la topologia discreta, si ha che f manda aperti saturi in aperti. La funzione sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' dunque un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia (Appello del 18.09.2023.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}$. Si considerino su $X = \mathbb{R}^2$ i sottoinsiemi $A_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < a\}$ e la famiglia

$$\mathcal{B} = \{(A_a | a \geq 0\}.$$

(1) Si mostri che $\mathcal{B}$ e' la base di una topologia τ.
(2) Si dica se (X,τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Siano $A = \{(0,0)\}$, $C = \{(0,1)\}$ e si trovino le loro chiusure.

Soluzione:

(1) $X = (\cup_{a \geq 0} A_a)$. Se $A_a, A_b \in \mathcal{B}$ anche $A_a \cap A_b = A_{\min\{a,b\}} \in \mathcal{B}$.
(2) X non è di Hausdorff ed è connesso poiche' tutti gli aperti non vuoti si intersecano. X non e' compatto in quanto gli elementi di $\mathcal{B}$ formano un ricoprimento di X dal quale non e' possibile estrarre un sottoricoprimento finito.
(3) $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\} = \overline{C}$.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1\}$ con la topologia indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$ e il sottoinsieme $W = \{(x,y) \in V | y \geq 0\}$. Trovare la frontiera di W in V e la frontiera di W in tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:
$Fr(W) = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | x \leq -1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1\}$ in V.
$Fr(W) = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | x < -1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | x > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri l'insieme $X = \mathbb{Z}$, con topologia τ indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}$. In X si consideri il sottoinsieme $A = \mathbb{Z} - \{0\}$ e la relazione di equivalenza $x' \rho x''$ se e solo se $x' = x''$ oppure $x', x'' \in A$.

(1) Si mostri che $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è di Hausdorff e compatto ma non connesso.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e

$$Y = \{x \in \mathbb{R} | 2 = |x|\}$$

con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) Siano x', x'' non equivalenti, allora uno dei due deve essere non nullo. Possiamo assumere $x' = 0, x'' = 0$. $A = \{0\}$, $B = \mathbb{R} - \{0\}$ sono due aperti saturi disgiunti con $x' \in A, x'' \in B$ quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è di Hausdorff. Osserviamo inoltre che $\pi(A)$ e $\pi(B)$ sconnettono $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$. Infine l'insieme $\{0, 1\}$ è compatto in X avendo solo due punti e $\pi(\{0, 1\}) = \frac{X}{\rho}$; quindi $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ è compatto.

(2) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x) = 2$ se $x \neq 0$ e $f(0) = -2$ e' continua (poiche' τ è la topologia discreta), suriettiva e totalmente compatibile (infatti $f(x') = f(x'') \Leftrightarrow x' = x'' = 0$ oppure $x', x'' \in A$).
Infine, essendo la topologia indotta su Y da quella euclidea ancora la topologia discreta, si ha che f manda aperti saturi in aperti. La funzione sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' dunque un omeomorfismo.