ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA 2022

Prova scritta di Topologia (Appello del 04.02.2022.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si consideri su $X = \mathbb{Z}$ la metrica euclidea d e la famiglia

$$\tau = \{A \subset X | 0 \notin A \text{ oppure } X - A \text{ e' chiuso e limitato rispetto a } d\}.$$

(1) Si dica se τ e' una topologia.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita τ_{cof} e la funzione $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{cof})$ definita da $f(x) = 3x$. Si dica se f e' continua e aperta.

Soluzione:

(1) Su X un insieme e' chiuso e limitato rispetto a d se se solo se e' finito. X contiene 0 e il suo complementare e' vuoto e quindi chiuso e limitato. $\emptyset$ non contiene 0. Unioni e intersezioni di sottoinsiemi di X che non contengono 0, non contengono ancora 0. Unioni e intersezioni finite di sottoinsiemi di X con complementare chiuso e limitato hanno ancora complementare chiuso e limitato.
(2) X non e' connesso in quanto per esempio $\{1\}$ e $X - \{1\}$ sono due aperti che sconnettono X. X e' di Hausdorff in quanto ogni $p \in \mathbb{Z} - \{0\}$ puo' essere separato da 0 usando gli aperti $\{p\}$ e $X - \{p\}$. Dati due interi distinti $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, li possiamo separare usando gli aperti $\{p\}$ e $\{q\}$. Dato un ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$ esiste un indice i_0 tale che $0 \in A_{i_0}$. Quindi $A_{i_0} = X - \{p_1, \ldots, p_m\}$ e devono esistere indici $i_1, \ldots, i_m$ tali che $p_1 \in A_{i_1}, \ldots, p_m \in A_{i_m}$. Dunque $A_{i_0}, \ldots, A_{i_m}$ formano un sottoricoprimento finito. (X, τ) e compatto ed Ã¨ la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{Z} - \{0\}$.
(3) f e' continua in quanto dato $A = \mathbb{R} - \{p_1, \ldots, p_s\} \in \tau_{cof}$, $f^{-1}(\mathbb{R} - \{p_1, \ldots, p_s\})$ e' tutto X tranne al piu' un numero finito di punti, quindi (sia che contenga 0 sia che non lo contenga) e' un elemento di τ.
f non e' aperta in quanto $\{1\} \in \tau$ ma $f(\{1\}) = \{3\} \notin \tau_{cof}$.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $W = \{M \in \mathbb{R}^{2,2} | M = -{}^tM\}$ l'insieme delle matrici antisimmetriche 2×2 a coefficenti reali, si consideri su $W \times W$ la seguente funzione d:

$$d(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) = |c_1 - c_2|.$$

(1) Si dimostri che d e' una distanza.
(2) Si dica se lo spazio metrico (W, d) e' completo.

Soluzione:

(1) $W = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} | a = d = 0, b = -c\} = \{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} | c \in \mathbb{R}\}$. Dunque

$$d(M_1, M_2) = d(\begin{pmatrix} 0 & -c_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}) = |c_1 - c_2| = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 \Leftrightarrow M_1 = M_2.$$

$$d(M_1, M_2) = d(\begin{pmatrix} 0 & -c_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}) = |c_1 - c_2| = |c_2 - c_1| = d(M_2, M_1).$$

$$d(M_1, M_2)+d(M_2, M_3) = d(\begin{pmatrix} 0 & -c_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix})+d(\begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -c_3 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix}) =$$
$$= |c_1 - c_2| + |c_2 - c_3| \geq |c_1 - c_3| = d(M_1, M_3).$$

(2) Se consideriamo $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea d_e, la funzione $f : W \to \mathbb{R}$ con $f(\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}) = c$ risulta essere un'isometria. Attraverso essa W risulta essere isometrico a $(\mathbb{R}, d_e)$ che e' completo. Quindi anche (W, d) e' completo.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 2\}$, con topologia τ indotta da quella euclidea. In X si consideri il sottoinsieme $A = \{1, 2\}$ e la relazione di equivalenza $x' \rho x''$ se e solo se $x' = x''$ oppure $x', x'' \in A$.

(1) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, -1 \leq x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$
con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

(2) Si dimostri che $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ non puo' essere omeomorfo a $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:

(1) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x) = (x - 1, 0)$ se $x \in [0, 1)$ e $f(x) = (cos(2\pi(x - 1)) - 1, sen(2\pi(x - 1)))$ se $x \in [1, 2]$ e' continua (poiche' $\lim_{x \to 1} x - 1 = cos(2\pi(0 - 1)) - 1 = 0$), suriettiva e totalmente compatibile (infatti se $x \neq x'$, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow (cos(2\pi(x - 1)) - 1, sen(2\pi(x - 1))) = (cos(2\pi(x' - 1)) - 1, sen(2\pi(x' - 1))) \Leftrightarrow x = 1, x' = 2$ o $x = 2, x' = 1$). Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

(2) Se $\frac{X}{\rho}$ fosse omeomorfo a S^1 allora $\frac{X}{\rho} - [1]$ dovrebbe essere omenomorfo a $S^1 - \{p\}$ dove p e' un qualche punto di S^1. Ma la classe $[1] = A = \{1, 2\}$, dunque $\frac{X}{\rho} - [1] = X - A$ che e' sconnesso mentre $S^1 - \{p\}$ e' connesso.

Prova scritta di Topologia (Appello del 18.02.2022.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ e la topologia

$$\tau_1 = \{A, B, \emptyset, \mathbb{R}\}.$$

Sia τ_c la topologia cofinita su $Y = \mathbb{R}^2$ e si consideri la topologia prodotto su $X = \mathbb{R}^3$

$$\tau = \tau_{\tau_1 \times \tau_c}.$$

(1) Si dica se (X, τ) è di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si consideri $\mathbb{Z}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$ e la funzione $f : \mathbb{Z} \to X$ con $f(t) = (t + 3, 0, 0)$. Si dica se f è continua e aperta.
(3) Si trovi la chiusura di $W = \{(0, 0, 0)\}$

Soluzione:

(1) (X, τ) non è di Hausdorff perche' per esempio $(1, 0, 0), (2, 0, 0) \in A \times \mathbb{R}^2$ e tutti gli aperti che contengono $(1, 0, 0)$ contengono anche $(2, 0, 0)$. Non è connesso poiche' $A \times \mathbb{R}^2$ è sia aperto che chiuso ed è compatto poiche' $(\mathbb{R}, \tau_1)$ lo e' (avendo un numero finito di aperti) e $(\mathbb{R}^2, \tau_c)$ pure (ogni spazio con topologia cofinita e' compatto).
(2) f è continua poiche' $\mathbb{Z}$ ha la topologia dicreta. f non e' aperta infatti $\{0\}$ è un aperto di $\mathbb{Z}$ ma $f(\{0\}) = \{(3, 0, 0)\}$ che non è un aperto in (X, τ).
(3) $\overline{W} = B \times \{0\} \times \{0\}$.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri in $\mathbb{Z}$ la metrica euclidea

$$d(x, y) = |x - y|$$

e il sottoinsieme $X = \{t \in \mathbb{Z} | -5 \leq t < 7\}$, si dica se (X, d) e' completo e si trovi la frontiera di X in $\mathbb{Z}$.

Soluzione:
d ristretta a X e' la metrica discreta quindi (X, d) e' completo in quanto ogni successione di Cauchy e' costante dopo un numero finito di passi e quindi e' convergente in X e $Fr(X) = \emptyset$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri su $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq 1\}$ con la topologia τ indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, la relazione di equivalenza $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ se e solo se $x' + y' = x + y$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e $Y = \{t \in \mathbb{R}, |t| \leq 1\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff. Infatti siano $(x', y'), (x'', y'')$ non equivalenti. Abbiamo $x' + y' = q', x'' + y'' = q''$ con $q' \neq q''$; possiamo supporre $q' > q''$. Sia $h = \frac{q''+q'}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x+y < h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x+y > h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.

(2) Definiamo $f : X \to Y$ tale che $f(x, y) = x + y$. Notiamo che e' totalmente compatibile ed e' continua e suriettiva. Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia (Appello del 23.06.2022.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$, e la topologia

$$\tau_1 = \{A, B, \emptyset, \mathbb{R}\}.$$

Sia τ_d la topologia discreta su $\mathbb{Z}$ e si consideri la topologia prodotto su $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

$$\tau = \tau_{\tau_1 \times \tau_d}.$$

(1) Si dica se (X, τ) è di Hausdorff, connesso e compatto.
(2) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e la funzione $f : \mathbb{R} \to X$ con $f(t) = (3t, 0)$. Si dica se f è continua e aperta.
(3) Si trovi la chiusura di $W = \{(3, 0)\}$

Soluzione:

(1) (X, τ) non è di Hausdorff perche' per esempio $(1, 0), (2, 0) \in B \times \mathbb{Z}$ e tutti gli aperti che contengono $(1, 0)$ contengono anche $(2, 0)$. Non è connesso poiche' $A \times \mathbb{Z}$ è sia aperto che chiuso e non è compatto poiche' $(\mathbb{Z}, \tau_d)$ non lo e'.
(2) f non è continua poiche' $B \times \{0\} \in \tau$ ma $f^{-1}(B \times \{0\}) = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$ che non e' un aperto euclideo. f non e' aperta infatti l'intervallo $A = (0, 1)$ è un aperto euclideo ma $f(A) = (0, 3) \times \{0\}$ che non è un aperto in (X, τ).
(3) $\overline{W} = B \times \{0\}$.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri in $\mathbb{R}$ la metrica d discreta e il sottoinsieme $X = \{t \in \mathbb{R} | -2 \leq t < 1\}$, si dica se (X, d) e' completo e si trovi la frontiera di X in $\mathbb{R}$.

Soluzione:
(X, d) e' completo perche' qualsiasi spazio con la topologia discreta e' completo e la frontiera di X in $\mathbb{R}$ e' vuota.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri su $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 1\}$ con la topologia τ indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, la relazione di equivalenza $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ se e solo se $|y'| = |y|$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e $Y = \{t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff. Infatti siano $(x', y'), (x'', y'')$ non equivalenti. Abbiamo $|y'| = q', | + y''| = q''$ con $q' \neq q''$; possiamo supporre $q' > q''$. Sia $h = \frac{q''+q'}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| < h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| > h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.

(2) Definiamo $f : X \to Y$ tale che $f(x,y) = |y|$. Notiamo che e' totalmente compatibile ed e' continua e suriettiva. Infine essendo gli aperti saturi di X simmetrici rispetto all'asse x vediamo che f manda aperti saturi in aperti. Quindi la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e' anche aperta e dunque e' un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia del 12/9/2022.

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $X = \mathbb{R}^3$ i sottoinsiemi

$$A_r = \{(x, y, z) \in X | x^2 + y^2 + z^2 < r\}$$

e la famiglia

$$\mathcal{B} = \{A_r | r \geq 0\}.$$

(1) Si mostri che $\mathbb{B}$ e' la base di una topologia τ.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Siano $A = \{(1, 0, 0)\}$, $C = \{(0, 0, 0)\}$ e si trovino le loro chiusure.

Soluzione:

(1) $X = \cup_{r \geq 0} A_r$. Se $U, W \in \mathcal{B}$ anche $U \cap W \in \mathcal{B}$.
(2) X non e' di Hausdorf poiche' tutti gli aperti non vuoti contengono $(0, 0, 0)$, quindi, per esempio non esistono due aperti disgiunti uno contenente $(0, 0, 1)$ e l'altro $(0, 0, 0)$. X e' connesso in quanto tutti gli aperti non vuoti si intersecano. X non e' compatto in quanto gli elementi di $\mathcal{B}$ formano un ricoprimento di X dal quale non e' possibile estrarre un sottoricoprimento finito.
(3) $\overline{C} = X$ in quanto l'unico chiuso che contiene $(0, 0, 0)$ e' X stesso. $U = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ e' il piu' grande aperto che non contiene $(0, 0, 1)$ quindi $\overline{A} = \{(x, y, z) \in X | x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$.

Esercizio 2. (7 punti)
Nell'insieme $X = \mathbb{R}^2$ con la distanza euclidea, si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}, 0 \leq y \leq 2\}$$

(1) Quali sono le componenti connesse di V?
(2) Trovare la frontiera di V in X.

Soluzione:

(1) Le componenti connesse sono una quantita' numerabile: $V_n = \{(x, y) \in V | x = \frac{1}{n}, 0 \leq y \leq 2\}$.
(2) $Fr(V) = V \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 0 \leq y \leq 2\}$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, con la topologia τ indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, la relazione di equivalenza $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ se e solo se $x' - y' = x - y$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.

(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e $Y = \{t \in \mathbb{R}, |t| \leq \sqrt{2}\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff. Infatti siano $(x', y'), (x'', y'')$ non equivalenti.
Abbiamo $x' - y' = q', x'' - y'' = q''$ con $q' \neq q''$; possiamo supporre $q' > q''$. Sia $h = \frac{q''+q'}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x-y < h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x-y > h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.

(2) Definiamo $f : X \to Y$ tale che $f(x, y) = x - y$. Notiamo che e' totalmente compatibile ed e' continua e suriettiva. Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.