ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA 2021

Prova scritta di Topologia (Appello del 04.02.2021.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si consideri su $X = \mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\}$ la famiglia

$$\tau = \{A \subset X | \sqrt{2} \notin A \text{ oppure } X - A \text{ e' finito}\}.$$

(1) Si dica se τ e' una topologia.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Si consideri $\mathbb{Z}$ con la topologia discreta e la funzione $f : \mathbb{Z} \to X$ definita da $f(x) = x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = \sqrt{2}$. Si dica se f e' continua e aperta.

Soluzione:

(1) X contiene $\sqrt{2}$ e il suo complementare e vuoto e quindi finito. $\emptyset$ non contiene $\sqrt{2}$. Unioni e intersezioni di sottoinsiemi di X che non contengono $\sqrt{2}$, non contengono ancora $\sqrt{2}$. Unioni e intersezioni di sottoinsiemi di X con complementare finito hanno ancora complementare finito.
(2) X non e' connesso in quanto per esempio $\{0\}$ e $X - \{0\}$ sono due aperti che sconnettono X. X e' di Hausdorff in quanto ogni $p \in \mathbb{Z}$ puo' essere separato da $\sqrt{2}$ usando gli aperti $\{p\}$ e $X - \{p\}$. Dati due interi distinti $p, q \in \mathbb{Z}$, li possiamo separare usando gli aperti $\{p\}$ e $\{q\}$. Dato un ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$ esiste un indice i_0 tale che $\sqrt{2} \in A_{i_0}$. Quindi $A_{i_0} = X - \{p_1, \ldots, p_m\}$ e devono esistere indici $i_1, \ldots, i_m$ tali che $p_1 \in A_{i_1}, \ldots, p_m \in A_{i_m}$. Dunque $A_{i_0}, \ldots, A_{i_m}$ estrarre un sottoricoprimento finito. (X, τ) e compatto ed è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{Z}$.
(3) f e' continua in quanto tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ sono aperti.
f non e' aperta in quanto $\{0\}$ è aperto ma $f(\{0\}) = \{\sqrt{2}\}$ che non e' aperto in X.

Esercizio 2. (9 punti)
Nell'insieme $\mathbb{R}_1[X]$ dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 1, a coefficenti reali, si consideri l'insieme

$$V = \{p(X) = aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | 0 \leq a, b \leq 2\}$$

con la seguente distanza (non è necessario dimostrare che e' una distanza):
dati $p_1(X) = a_1X + b_1, p_2(X) = a_2X + b_2$

$$d(p_1(X), p_2(X)) = |p_1(0) - p_2(0)| + |p_1(1) - p_2(1) - p_1(0) + p_2(0)|.$$

(1) Si dica se lo spazio metrico (V, d) e' completo.
(2) Dato $W = \{p(X) = aX + b \in V | 0 \leq a \leq 1\}$, trovare la frontiera di W in V.

Soluzione:

(1) Se consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la metrica d_{L^1}, la funzione $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^2$ con $f(aX+b) = (a, b)$ risulta essere un'isometria. Attraverso essa V risulta essere isometrico al sottospazio di $\mathbb{R}^2$ $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq a, b \leq 2\}$. Essendo Z compatto in $(\mathbb{R}^2, d_{L^1})$ possiamo dedurre che e' completo. Quindi anche (V, d) e' completo.

(2) $Fr(W) = \{p(X) = aX + b \in V | a = 1\}$.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, con topologia τ indotta da quella euclidea. In X si consideri la relazione di equivalenza $(x', y')\rho(x'', y'')$ se e solo se $(x', y') = (x'', y'')$ oppure $y' = y''$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' connesso e di Hausdorff.

(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e $Y = [0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) (X, τ) è connesso quindi lo e' pure $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$. Siano $(x', y'), (x'', y'') \in X$ non equivalenti. Abbiamo $y' \neq y''$ possiamo supporre $y' > y''$. Sia $h = \frac{|y''+y'|}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi, dunque $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' di Hausdorff.

(2) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x, y) = y$ e' continua, suriettiva e totalmente compatibile. Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia (Appello del 23.06.2021.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 0\}$ e la famiglia

$$\tau = \{A, B, \emptyset, \mathbb{Z}\}.$$

(1) Si dica se τ è una topologia.
(2) Si dica se $(\mathbb{Z}, \tau)$ è di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Si consideri $\mathbb{N}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$ e la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ con $f(x) = |x|$. Si dica se f è continua e aperta.

Soluzione:

(1) τ ha solo 4 aperti e tutte le loro unioni e intersezioni sono aperti quindi τ è una topologia.
(2) $(\mathbb{Z}, \tau)$ non è di Hausdorff perche' per esempio $1, 2 \in \mathbb{Z}, A$ e $1, 2 \notin B$ quindi non esistono due aperti disgiunti che li separino. $(\mathbb{Z}, \tau)$ non è connesso poiche' A è sia aperto che chiuso ed è compatto avendo un numero finito di aperti.
(3) f non è continua poiche' $\{0\}$ è un aperto di $\mathbb{N}$ ma $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ che non è un aperto. f è aperta poiche' $f(A), f(B), f(\mathbb{Z})$ sono aperti di $\mathbb{N}$ che è dotato della topologia discreta.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri in $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = tx, 1 \leq t < 2\}$ si descrivino la frontiera $Fr(X)$ e l'interno $Int(X)$.

Soluzione:

$Fr(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$.
$Int(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = tx, 1 < t < 2\} - \{(0, 0)\}$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri su $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ con la topologia τ indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, la relazione di equivalenza $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ se e solo se $x' = x$ e $y' = y$ oppure $y' = y$, $x' = 1$ e $x = -1$ oppure $y' = y$, $x' = -1$ e $x = 1$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e un cilindro $C = S^1 \times I$ dove S^1 è ' una circonferenza e I è un intervallo chiuso.

Soluzione:

(1) $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff. Infatti siano $(x', y'), (x'', y'')$ non equivalenti.
Se $y' \neq y''$ possiamo supporre $y' > y''$. Sia $h = \frac{|y''+y'|}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < y' - h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > y' - h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.
Se $y = y'$ devo avere $x'' \neq -1, 1$ oppure $x' \neq -1, 1$. Supponiamo $x'' \neq -1, 1$ e sia $k = min(|x'' - x'|, |x'' - 1|, |x'' + 1|)$, $h = \frac{k}{2}$. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x'' - h < x <$

$x'' + h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > x'' + h, x < x'' - h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.

(2) Definiamo $f : X \to C = S^1 \times I$ tale che $f(x, y) = (cos(x\pi), sen(x\pi), y)$. Notiamo che è totalmente compatibile poichè $(cos(\pi), sen(\pi) = (-1, 0) = (cos(-\pi), sen(-\pi)$ ed è continua e suriettiva. Infine essendo X compatto e C di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è anche chiusa e dunque è un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia (Appello del 8.07.2021.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si consideri su $X = \mathbb{R}$ la famiglia

$$\mathcal{B} = \{(1-a, 1+a) | a \geq 0\}.$$

(1) Si mostri che $\mathcal{B}$ e' la base di una topologia τ.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Siano $A = \{1\}$, $C = \{0\}$ e si trovino le loro chiusure.

Soluzione:

(1) $X = \cup_{a \geq 0}(1-a, 1+a)$. Se $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ anche $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B}$.
(2) X non e' di Hausdorf poiche' tutti gli aperti non vuoti contengono 1, quindi, per esempio non esistono due aperti disgiunti uno contenente 1 e l'altro 2. X e' connesso in quanto tutti gli aperti non vuoti si intersecano. X non e' compatto in quanto gli elementi di $\mathcal{B}$ formano un ricoprimento di X dal quale non e' possibile estrarre un sottoricoprimento finito.
(3) $\overline{A} = X$ in quanto l'unico chiuso che contiene 1 e' X stesso. $(0, 2)$ è il piu' grande aperto che non contiene 0 quindi $\overline{C} = (-\infty, 0] \cap [2, \infty)$.

Esercizio 2. (7 punti)
Nell'insieme $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la distanza euclidea, si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y) \in X | 0 < x < 4, 0 \leq y \leq 2\}$$

(1) Quante componenti connesse ha V?
(2) Trovare la frontiera di V in X.

Soluzione:

(1) $X = \{(1,0), (2,0), (3,0), (1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2)\}$ ed è dotato di topologia discreta. Ha quindi 9 componenti connesse.
(2) $Fr(V) = \emptyset$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| = 1\}$, con topologia τ indotta da quella euclidea. In X si consideri la relazione di equivalenza $(x', y')\rho(x'', y'')$ se e solo se $|x'| = |x''|$ e $y' = y''$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' connesso e di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e $Y = [0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) (X,τ) è connesso quindi lo e' pure $(\frac{X}{\rho},\frac{\tau}{\rho})$. Siano $(x',y'),(x'',y'')\in X$ non equvalenti. Abbiamo $|x'|\neq|x''|$ possiamo supporre $|x'|>|x''|$. Sia $h=\frac{|x''|+|x'|}{2}$ e siano $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,|x|<h\}\cap X$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,|x|>h\}\cap X$. Si ha che A,B sono aperti saturi, $(x',y')\in B,(x'',y'')\in A$ e $A\cap B=\emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi, dunque $(\frac{X}{\rho},\frac{\tau}{\rho})$ e' di Hausdorff.

(2) La funzione $f:X\to Y$ definita da $f(x,y)=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}$ e' continua, suriettiva e totalmente compatibile. Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho},\frac{\tau}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia. (Appello del 13/09/2021)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $X = \mathbb{Z}$ i sottoinsiemi

$$A = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$$

e la famiglia

$$\tau = \{A, B, \emptyset, X\}.$$

(1) Si dimostri che τ e' una topologia e si confronti τ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Si consideri $\mathbb{Z}$ con la topologia discreta e la funzione $f : \mathbb{Z} \to X$ definita da $f(x) = 2x$. Si dica se f e' continua e aperta.

Soluzione:

(1) X, $\emptyset$ sono in τ. $A \cap B = X$, $A \cup B = \emptyset$. A, B sono aperti anche nella topologia indotta dalla topologia euclidea quindi τ e' meno fine.
(2) X non e' connesso in quanto $A \cap B = X$, $A \cup B = \emptyset$. X non e' di Hausdorff in quanto per esempio 2 e 4 non possono essere separati da due aperti disgiunti. (X, τ) e' compatto poiche' ha un numero finito di aperti.
(3) f e' continua in quanto tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ sono aperti.
f non e' aperta in quanto $\{0\} \in \tau$ ma $f(\{0\}) = \{0\}$ che non e' aperto in X.

Esercizio 2. (9 punti)
Nell'insieme $\mathbb{R}_1[X]$ dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 1, a coefficenti reali, si consideri l'insieme

$$V = \{p(X) = aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | 0 \leq a, b \leq 3\}$$

con la seguente distanza (non è necessario dimostrare che e' una distanza):
dati $p_1(X) = a_1X + b_1, p_2(X) = a_2X + b_2$

$$d(p_1(X), p_2(X)) = max(|p_1(0) - p_2(0)|, |p_1(1) - p_2(1) - p_1(0) + p_2(0)|).$$

(1) Si dica se lo spazio metrico (V, d) e' completo.
(2) Dato $W = \{p(X) = aX + b \in V | 0 \leq a \leq 2\}$, trovare la frontiera di W in V.

Soluzione:

(1) Se consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la metrica d_{L^∞}, la funzione $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^2$ con $f(aX + b) = (a, b)$ risulta essere un'isometria. Attraverso essa V risulta essere isometrico al sottospazio di $\mathbb{R}^2$ $Z = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq a, b \leq 3\}$. Essendo Z compatto in $(\mathbb{R}^2, d_{L^\infty})$ possiamo dedurre che e' completo. Quindi anche (V, d) e' completo.
(2) $Fr(W) = \{p(X) = aX + b \in V | a = 2\}$.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$, con topologia τ indotta da quella euclidea. In X si consideri la relazione di equivalenza $(x', y')\rho(x'', y'')$ se e solo se $x' = x''$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' connesso e di Hausdorff.

(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e $Y = [0, 4]$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) (X, τ) è connesso quindi lo e' pure $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$. Siano $(x', y'), (x'', y'') \in X$ non equivalenti. Abbiamo $x' \neq x''$ possiamo supporre $x' > x''$. Sia $h = \frac{|x''+x'|}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi, dunque $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' di Hausdorff.

(2) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x, y) = 4x$ e' continua, suriettiva e totalmente compatibile. Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia del 21/10/2021.

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $X = \mathbb{R}^2$ i sottoinsiemi

$$A_r = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 < r\}$$

e la famiglia

$$\mathcal{B} = \{A_r | r \geq 0\}.$$

(1) Si mostri che $\mathbb{B}$ e' la base di una topologia τ.
(2) Si dica se (X, τ) e' di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Siano $A = \{(1, 0)\}$, $C = \{(0, 0)\}$ e si trovino le loro chiusure.

Soluzione:

(1) $X = \cup_{a \geq 0}(1 - a, 1 + a)$. Se $U, W \in \mathcal{B}$ anche $U \cap W \in \mathcal{B}$.
(2) X non e' di Hausdorf poiche' tutti gli aperti non vuoti contengono $(0, 0)$, quindi, per esempio non esistono due aperti disgiunti uno contenente $(0, 1)$ e l'altro $(0, 0)$. X e' connesso in quanto tutti gli aperti non vuoti si intersecano. X non e' compatto in quanto gli elementi di $\mathcal{B}$ formano un ricoprimento di X dal quale non e' possibile estrarre un sottoricoprimento finito.
(3) $\overline{C} = X$ in quanto l'unico chiuso che contiene $(0, 0)$ e' X stesso. $U = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 < 1\}$ è il piu' grande aperto che non contiene $(0, 1)$ quindi $\overline{A} = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Esercizio 2. (7 punti)
Nell'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Z}\}$ con la distanza euclidea, si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y) \in X | 0 \leq x, y \leq 2\}$$

(1) Quante componenti connesse ha V?
(2) Trovare la frontiera di V in X.

Soluzione:

(1) Le componenti connesse sono 3: $V_1 = \{(x, y) \in V | x = 0\}$, $V_2 = \{(x, y) \in V | x = 1\}$, $V_3 = \{(x, y) \in V | x = 2\}$
(2) $Fr(W) = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 || x| + |y| = 1\}$, con topologia τ indotta da quella euclidea. In X si consideri la relazione di equivalenza $(x', y')\rho(x'', y'')$ se e solo se $|y'| = |y''|$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' connesso e di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e $Y = [0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Soluzione:

(1) (X, τ) è connesso quindi lo e' pure $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$. Siano $(x', y'), (x'', y'') \in X$ non equivalenti. Abbiamo $y' \neq y''$ possiamo supporre $y' > y''$. Sia $h = \frac{|y''+y'|}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi, dunque $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' di Hausdorff.

(2) La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x, y) = |y|$ e' continua, suriettiva e totalmente compatibile. Infine essendo X compatto e Y di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\rho}, \frac{\tau}{\rho})$ e' anche chiusa e dunque e' un omeomorfismo.