ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA 2020

Prova scritta di Topologia (Appello del 08.02.2020.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si consideri su $\mathbb{R}$ la famiglia

$$\tau = \{A \subset \mathbb{R} | 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

(1) Si dica se τ è una topologia.
(2) Si dica se $(\mathbb{R}, \tau)$ è di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x) = (x, x^2)$. Si dica se f è continua e aperta.

Soluzione:

(1) $\mathbb{R}$ contiene 0 e unioni e intersezioni di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contengono 0, contengono ancora 0.
(2) Tutti gli aperti non vuoti si inersecano quindi $(\mathbb{R}, \tau)$ non è di Hausdorff ed è connesso. Dal ricoprimento $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, quindi $(\mathbb{R}, \tau)$ non è compatto.
(3) f non è continua in quanto per esempio $f^{-1}((0, 1) \times (0, 1)) = (0, 1) \notin \tau$.
f non è aperta in quanto $\{0\} \in \tau$ ma $f(0) = (0, 0)$ che non è aperto in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$ con la topologia τ indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$. Sia $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y < sen(x)\}$, si descrivino la frontiera $Fr(Z)$ e l'interno $Int(Z)$ in (X, τ).

Soluzione:
$Fr(Z) = \{(x, y) \in X | y = sen(x)\}$.
$Int(Z) = Z - Fr(Z)$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri su $X = \mathbb{Q}$, con topologia τ discreta, la relazione di equivalenza $p\mathcal{R}q$ se e solo se $p - q \in \mathbb{Z}$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e $Y = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ con la topologia indotta da X.

Soluzione:

(1) Siano $p, q \in X$ non equivalenti. $\{p\}$ e $\{q\}$ sono aperti saturi disgiunti in X quindi $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.
(2) La funzione mantissa $M : X \to Y$ è continua, suriettiva e totalmente compatibile. Inoltre manda aperti saturi in aperti poiche' Y è dotato della topologia discreta. Quindi la funzione indotta sul quoziente è un omemorfismo tra $\frac{X}{\mathcal{R}}$ e Y.

Prova scritta di Topologia (Appello del 25.06.2020.)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si considerino su $\mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 0\}$ e la famiglia

$$\tau = \{A, B, \emptyset, \mathbb{Z}\}.$$

(1) Si dica se τ è una topologia.
(2) Si dica se $(\mathbb{Z}, \tau)$ è di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Si consideri $\mathbb{N}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$ e la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ con $f(x) = |x|$. Si dica se f è continua e aperta.

Soluzione:

(1) τ ha solo 4 aperti e tutte le loro unioni e intersezioni sono aperti quindi τ è una topologia.
(2) $(\mathbb{Z}, \tau)$ non è di Hausdorff perche' per esempio $1, 2 \in \mathbb{Z}, A$ e $1, 2 \notin A$ quindi non esitono due aperti disgiunti che li separino. $(\mathbb{Z}, \tau)$ non è connesso poiche' A è sia aperto che chiuso ed è compatto avendo un nuomero finito di aperti.
(3) f non è continua poiche' $\{0\}$ è un apero di $\mathbb{N}$ ma $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ che non è un aperto. f è aperta poiche' $f(A), f(B), f(\mathbb{Z})$ sono aperti di $\mathbb{N}$ che è dotato della topologia discreta.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri in $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = tx, 1 \leq t < 2\}$ si descrivino la frontiera $Fr(X)$ e l'interno $Int(X)$.
Soluzione:
$Fr(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$.
$Int(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = tx, 1 < t < 2\} - \{(0, 0)\}$.

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri su $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ con la topologia τ indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, la relazione di equivalenza $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$ se e solo se $x' = x$ e $y' = y$ oppure $y' = y$, $x' = 1$ e $x = -1$ oppure $y' = y$, $x' = -1$ e $x = 1$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e un cilindro $C = S^1 \times I$ dove S^1 è ' una circonferenza e I è un intervallo chiuso.

Soluzione:

(1) $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff. Infatti siano $(x', y'), (x'', y'')$ non equivalenti.
Se $y' \neq y''$ possiamo supporre $y' > y''$. Sia $h = \frac{|y''-y'|}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < y' - h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > y' - h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.
Se $y = y'$ devo avere $x'' \neq -1, 1$ oppure $x' \neq -1, 1$. Supponiamo $x'' \neq -1, 1$ e sia $k = min(|x'' - x'|, |x'' - 1|, |x'' + 1|)$, $h = \frac{k}{2}$. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x'' - h < x < x'' + h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > x'' + h, x < x'' - h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.

(2) Definiamo $f : X \to C = S^1 \times I$ tale che $f(x, y) = (cos(x\pi), sen(x\pi), y)$. Notiamo che è totalmente compatibile poichè $(cos(\pi), sen(\pi) = (-1, 0) = (cos(-\pi), sen(-\pi)$ ed è continua e suriettiva. Infine essendo X compatto e C di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è anche chiusa e dunque un omeomorfismo.

Prova scritta di Topologia. (Appello del 10/07/2020)

Nota. Per "si dica" si intende sempre "si dica, giustificando la risposta,".

Esercizio 1. (12 punti)
Si consideri su $\mathbb{Z}$ per ogni $n \in N$ l'insieme $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \| -n \leq x \leq n\}$ e la famiglia

$$\tau = \{A_n, \emptyset, \mathbb{Z}\}.$$

(1) Si dica se τ è una topologia.
(2) Si dica se $(\mathbb{Z}, \tau)$ è di Hausdorff, connesso e compatto.
(3) Si consideri $\mathbb{N}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ con la topologia τ e la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ con $f(x) = 2x$. Si dica se f è continua e aperta.

Soluzione:

(1) τ è una topologia poiche' unioni e intersezioni di insiemi di tipo A_n è ancora un insieme di tipo A_n.
(2) Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $0 \in A_n$ quindi non esistono aperti non vuoti disgionti. Deduciamo che $(\mathbb{Z}, \tau)$ non è di Hausdorff ed è connesso.
$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $\mathbb{Z}$ dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, dunque $(\mathbb{Z}, \tau)$ non è compatto.
(3) f è continua le controimmagini di tutti gli aperti di $\mathbb{Z}$ sono aperti in $\mathbb{N}$ che è dotato della topologia discreta.
f non è aperta poiche' per esempio $A = \{1\}$ è un aperto di $\mathbb{N}$ ma $f(A) = \{2\}$ che non è un elemento di τ.

Esercizio 2. (7 punti)
Si consideri l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ con la topologia τ indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^2$. Sia $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < cos(x)\}$, si descrivi la chiusura $\bar{Z}$ in (X, τ).

Soluzione:

$$\bar{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y \leq cos(x)\}$$

Esercizio 3. (12 punti)
Si consideri su $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ con la topologia τ indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, la relazione di equivalenza $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$ se e solo se $y'' \leq 0$ e $y' \leq 0$.

(1) Si dica se $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff.
(2) Si costruisca un omeomorfismo tra $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ e una circonferenza S^1.

Soluzione:

(1) $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è di Hausdorff. Infatti siano $(x', y'), (x'', y'')$ non equivalenti. Possiamo supporre $y' > 0$ e $y'' < y'$. Sia $h = \frac{y'}{2}$ e siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < h\} \cap X$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > h\} \cap X$. Si ha che A, B sono aperti saturi, $(x', y') \in B, (x'', y'') \in A$ e $A \cap B = \emptyset$. Abbiamo quindi separato i due punti con aperti saturi.

(2) Rappresentiamo i punti di X in coordinate polari $(cos(\theta), sen(\theta))$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Definiamo $f : X \to S^1$ tale che $f(cos(\theta), sen(\theta)) = (cos(2\theta), sen(x\theta))$ se $\theta \in (0, \pi)$ e $f(cos(\theta), sen(\theta)) = (1, 0)$ se $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Notiamo che è totalmente compatibile, suriettiva ed è continua essendo date da due funzioni continue su $(0, \pi)$ e su $[\pi, 2\pi]$ e il limite destro e il limite sinistro nel punto π coincidono. Infine essendo X compatto e S^1 di Hausdorff possiamo dedurre che la funzione indotta sul quoziente $(\frac{X}{\mathcal{R}}, \frac{\tau}{\mathcal{R}})$ è anche chiusa e dunque un omeomorfismo.