

Esercizio (tratto dal Problema 12.8 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

0.5 moli di gas ideale biatomico sono contenute all'interno di un recipiente adiabatico di volume $2V_0$ alla temperatura $T_A = 290\text{ K}$ [Fig.1(a)]. Con una compressione irreversibile il gas viene portato ad uno stato B di volume V_0 [Fig.1(b)] e di temperatura T_B . Infine, rimuovendo un setto che lo separa da un ambiente vuoto di volume V_0 , avente anch'esso pareti adiabatiche, il gas ritorna ad occupare un volume $2V_0$ con una temperatura finale T_C [Fig.1(c)].

1. Sapendo che $T_C = 410\text{ K}$, quanto vale la temperatura T_B ?
2. Calcolare il lavoro totale scambiato dal gas nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$, specificando se si tratta di lavoro eseguito o subito dal gas;
3. Calcolare la variazione di entropia dell'universo;

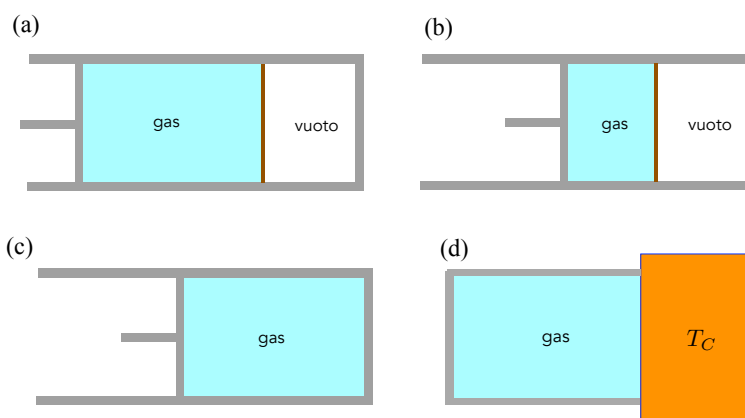


Figure 1:

Supponiamo che invece il gas possa passare *direttamente* dallo stato iniziale A allo stato finale C venendo posto a contatto termico con una sorgente alla temperatura T_C [Fig.1(d)]. Calcolare quanto vale in tal caso

4. Il calore scambiato dal gas (precisando se si tratta di calore ceduto o assorbito)
5. La variazione di entropia del termostato
6. La variazione di entropia del gas
7. La variazione di entropia dell'universo, specificando se è maggiore, minore o uguale a quella del caso precedente

(costante universale dei gas $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$)

SOLUZIONE

Dati Noti:

$$n = 0.5 \text{ mol}$$

$$T_A = 290 \text{ K}$$

$$T_C = 410 \text{ K}$$

$$V_A = 2V_0$$

$$V_B = V_0$$

$$V_C = 2V_0$$

1. La trasformazione $B \rightarrow C$ compiuta dal gas è un'espansione adiabatica libera. Pertanto il gas non effettua lavoro (in quanto si espande nel vuoto) e non scambia calore (in quanto adiabatica). Per il primo principio, l'energia interna U del gas non cambia

$$\Delta U_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} = \underbrace{Q_{\text{gas}}^{B \rightarrow C}}_{=0} - \underbrace{W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C}}_{=0} = 0 \quad (1)$$

Siccome il gas è ideale, l'energia interna dipende solo dalla temperatura. Pertanto, non essendo variata l'energia interna, non è variata nemmeno la temperatura. Ciò significa che:

$$\boxed{T_B = T_C = 410 \text{ K}} \quad (2)$$

2. Il lavoro totale scambiato dal gas nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$ è dato da

$$W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} = W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} + \underbrace{W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C}}_{=0} \quad (3)$$

dove il secondo termine è nullo perché, come osservato sopra, l'espansione $B \rightarrow C$ è libera ed il gas non compie alcun lavoro sul vuoto. Per calcolare invece il lavoro $W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B}$, si può sfruttare il fatto che la trasformazione è adiabatica e dunque, per il primo principio

$$\begin{aligned} \underbrace{\Delta U_{\text{gas}}^{A \rightarrow B}}_{=nc_V(T_B - T_A)} &= \underbrace{Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow B}}_{=0} - W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} \\ &\Downarrow \\ W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} &= -nc_V(T_B - T_A) \\ &\Downarrow \text{ [gas biatomico: } c_V = \frac{5}{2}R \text{]} \\ W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} &= n \frac{5}{2}R(T_A - T_B) \end{aligned} \quad (4)$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} = 0.5 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (290 - 410) \text{ K} = -1.25 \text{ kJ}$$

Pertanto l'Eq.(3) dà

$$\boxed{W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} = -1.25 \text{ kJ}} \quad (< 0 \text{ lavoro subito dal gas}) \quad (5)$$

3. Dato che le trasformazioni $A \rightarrow B \rightarrow C$ sono adiabatiche, il gas è completamente sconnesso dall'ambiente. Pertanto l'ambiente non subisce alcuna variazione di entropia, e la variazione di entropia dell'universo è unicamente dovuta a quella del gas

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{univ}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} &= \Delta S_{\text{gas}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} + \underbrace{\Delta S_{\text{amb}}^{A \rightarrow B \rightarrow C}}_{=0} \\ &\Downarrow \\ \Delta S_{\text{univ}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} &= \Delta S_{\text{gas}}^{A \rightarrow B \rightarrow C}\end{aligned}\quad (6)$$

dove, essendo $V_A = V_C = 2V_0$,

$$\Delta S_{\text{gas}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} = nc_V \ln \frac{T_C}{T_A} + nR \ln \underbrace{\frac{V_C}{V_A}}_{=0} \quad (7)$$

Ricordando che $c_V = \frac{5}{2}R$ (gas biatomico), dalle Eq.(6) e (7) si ha

$$\Delta S_{\text{univ}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} = n \frac{5}{2} R \ln \frac{T_C}{T_A} \quad (8)$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\Delta S_{\text{univ}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} = 0.5 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot \ln \frac{410 \text{ K}}{290 \text{ K}}$$

ossia

$$\boxed{\Delta S_{\text{univ}}^{A \rightarrow B \rightarrow C} = 3.60 \frac{\text{J}}{\text{K}}} \quad (9)$$

4. Supponiamo ora che il gas passi direttamente dallo stato A allo stato C essendo posto in contatto con un termostato alla temperatura T_C . Dato che il volume non cambia, il calore scambiato dal gas è dato da

$$Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow C} = nc_V(T_C - T_A) \quad (10)$$

e, ricordando che $c_V = (5/2)R$,

$$Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow C} = n \frac{5}{2} R (T_C - T_A) \quad (11)$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow C} = 0.5 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot (410 - 290) \text{ K}$$

si ottiene

$$\boxed{Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow C} = +1.25 \text{ kJ}} \quad (> 0 \text{ calore assorbito dal gas}) \quad (12)$$

5. Il calore assorbito dal gas è un calore che è stato ceduto dal termostato ($Q_{\text{amb}}^{A \rightarrow C} = -Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow C}$). Pertanto la variazione di entropia del termostato (=ambiente), che rimane costantemente alla temperatura T_C , è data da

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{amb}}^{A \rightarrow C} &= \frac{Q_{\text{amb}}^{A \rightarrow C}}{T_C} = \\ &= \frac{(-Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow C})}{T_C}\end{aligned}\quad (13)$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\Delta S_{\text{amb}}^{A \rightarrow C} = -\frac{1.25 \text{ kJ}}{410 \text{ K}} = -3.05 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (14)$$

6. La variazione di entropia del gas è la stessa del caso precedente [vedi Eq.(7)], in quanto lo stato iniziale A e lo stato finale C sono i medesimi, e si ottiene pertanto dalla formula della variazione di entropia dei gas perfetti,

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}}^{A \rightarrow C} &= n c_V \ln \frac{T_C}{T_A} + n R \underbrace{\ln \frac{V_C}{V_A}}_{=0} \\ &= 0.5 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot \ln \frac{410 \text{ K}}{290 \text{ K}} \end{aligned} \quad (15)$$

ossia

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}}^{A \rightarrow C} = 3.60 \frac{\text{J}}{\text{K}}} \quad (16)$$

7. La variazione di entropia dell'universo è data dalla somma del contributo dell'ambiente e di quello del gas

$$\Delta S_{\text{univ}}^{A \rightarrow C} = \underbrace{\Delta S_{\text{gas}}^{A \rightarrow C}}_{=3.60 \frac{\text{J}}{\text{K}}} + \underbrace{\Delta S_{\text{amb}}^{A \rightarrow C}}_{=-3.05 \frac{\text{J}}{\text{K}}}$$

e dunque

$$\boxed{\Delta S_{\text{univ}}^{A \rightarrow C} = 0.55 \frac{\text{J}}{\text{K}}} \quad (17)$$

ed è dunque minore rispetto al caso precedente [vedi Eq.(9)].