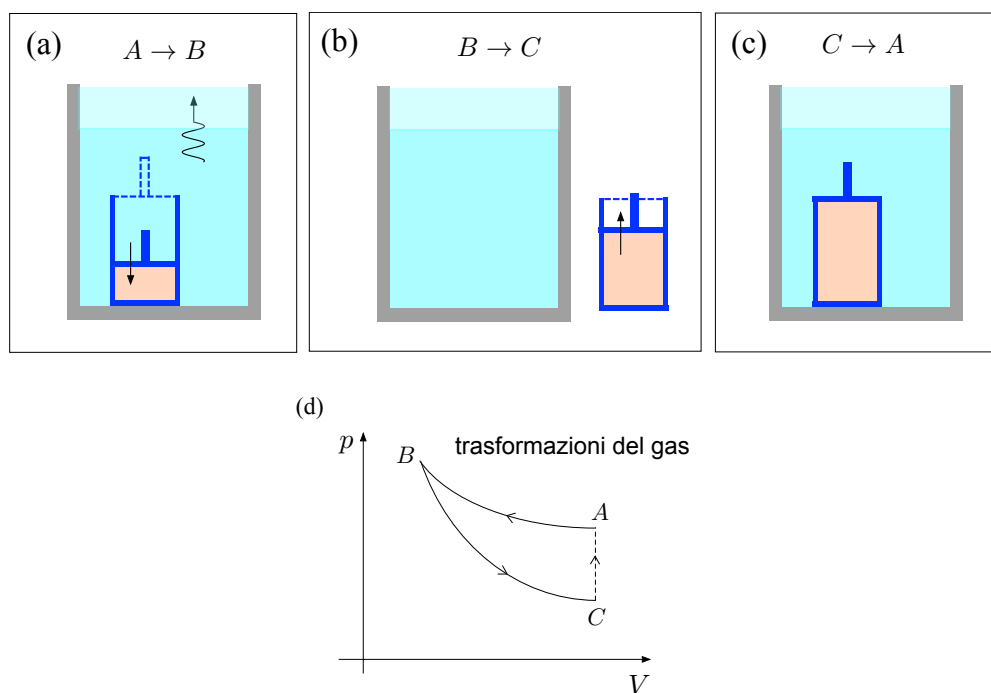


Esercizio (tratto dal Problema 12.23 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un recipiente contiene 10 kg di acqua alla temperatura costante di ebollizione 373.15 K. All'interno dell'acqua è immerso un cilindro a tenuta stagna, di volume V_A , contenente $n = 3$ moli di gas ideale biatomico in uno stato A, in equilibrio termico con l'acqua bollente. Mentre il cilindro è immerso nell'acqua, il gas viene compresso in modo isoterma reversibile tramite un pistone, fino a raggiungere uno stato B il cui volume V_B è pari ad $1/3$ del volume iniziale V_A . A seguito di ciò, si osserva che parte dell'acqua evapora passando dallo stato liquido allo stato gassoso [Fig.(a)].

1. Calcolare il lavoro $W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B}$ scambiato dal gas durante la trasformazione $A \rightarrow B$, specificando se si tratta di lavoro eseguito o subito dal gas
2. Calcolare il calore $Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow B}$ scambiato dal gas durante la trasformazione $A \rightarrow B$, specificando se si tratta di calore assorbito o ceduto dal gas
3. Calcolare la massa d'acqua Δm_a che evapora durante la trasformazione $A \rightarrow B$ del gas, sapendo che il calore latente di ebollizione dell'acqua vale $\lambda_{eb} = 22.6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$



Il cilindro viene poi tolto dall'acqua bollente rapidamente (senza perdite di calore) e, tramite un'espansione adiabatica reversibile, viene riportato al suo volume iniziale V_A [Fig.(b)], raggiungendo uno stato C. Infine il cilindro viene nuovamente immerso nell'acqua bollente ed il gas, mantenendo il volume costante [Fig(c)], si riporta così alla temperatura di 373.15 K di ebollizione dell'acqua, ritornando allo stato A iniziale [Fig(d)]. Calcolare:

4. la temperatura T_C dello stato C;
5. il lavoro $W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C}$ scambiato dal gas durante la trasformazione adiabatica $B \rightarrow C$, specificando se si tratta di lavoro eseguito o subito dal gas;
6. il calore $Q_{\text{gas}}^{C \rightarrow A}$ scambiato dal gas durante la trasformazione $C \rightarrow A$ a volume costante, specificando se si tratta di calore assorbito o ceduto dal gas;
7. la variazione di entropia $\Delta S_{\text{gas}}^{C \rightarrow A}$ del gas durante la trasformazione $C \rightarrow A$

(costante universale dei gas $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$)

SOLUZIONE

Dati Noti:

$$n = 3$$

$$m_a = 10 \text{ kg}$$

$$T_A = 373.15 \text{ K}$$

$$V_B = V_A/3$$

$$\lambda_{eb} = 22.6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

1. La trasformazione $A \rightarrow B$ compiuta dal gas è un'isoterma. Il lavoro scambiato dal gas è dato da

$$\begin{aligned} W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} &= \int_{V_A}^{V_B} p dV = \\ &= \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = \\ &\quad [\text{siccome è isoterma, } T \text{ rimane costantemente pari a } T_A, \text{ e si può portare fuori}] \\ &= nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = \\ &= nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \\ &\quad [\text{sfrutto } V_B = V_A/3] \\ &= nRT_A \ln \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{1}$$

Sfruttando $\ln(1/3) = -\ln 3$ otteniamo

$$W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} = -nRT_A \ln 3 < 0 \tag{2}$$

Sostituendo i dati

$$W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} = -3 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 373.15 \text{ K} \cdot \ln 3$$

si ottiene

$$\boxed{W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} = -10.22 \text{ kJ}} \quad (< 0 \text{ lavoro subito dal gas}) \tag{3}$$

2. Dato che in un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura, durante la trasformazione isoterma $A \rightarrow B$ in cui la temperatura non varia, l'energia interna del gas rimane invariata. Pertanto, per il primo principio

$$\begin{aligned} \underbrace{\Delta U_{\text{gas}}^{A \rightarrow B}}_{=0} &= Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} - W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} \\ &\Downarrow \\ Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} &= W_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} \end{aligned} \tag{4}$$

Pertanto

$$\boxed{Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} = -10.22 \text{ kJ}} \quad (< 0 \text{ calore ceduto dal gas}) \tag{5}$$

3. Il calore ceduto dal gas viene assorbito dall'acqua.

$$Q_{\text{acqua}}^{A \rightarrow B} = -Q_{\text{gas}}^{A \rightarrow B} = +10.22 \text{ kJ} \quad (> 0 \text{ calore assorbito dall'acqua}) \quad (6)$$

Siccome l'acqua si trova alla temperatura di ebollizione, tale calore non viene utilizzato per aumentare la temperatura dell'acqua, ma per effettuare la transizione di fase dallo stato liquido allo stato solido (calore latente). La massa Δm_a d'acqua che evapora si ricava tramite la relazione

$$Q_{\text{acqua}}^{A \rightarrow B} = \lambda_{eb} \Delta m_a \quad (7)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \Delta m_a &= \frac{Q_{\text{acqua}}^{A \rightarrow B}}{\lambda_{eb}} = \\ &= \frac{10.22 \cdot 10^3 \text{ J}}{22.6 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\boxed{\Delta m_a = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} \quad (8)$$

4. Per calcolare la temperatura dello stato C sfruttiamo il fatto che la trasformazione B→C è adiabatica reversibile, e dunque descritta dalla relazione

$$\begin{aligned} T_B V_B^{\gamma-1} &= T_C V_C^{\gamma-1} \\ \Downarrow \text{ [uso } T_B &= T_A, V_B = V_A/3 \text{ e } V_C = V_A] \\ T_A \left(\frac{V_A}{3}\right)^{\gamma-1} &= T_C V_A^{\gamma-1} \end{aligned}$$

da cui

$$T_C = T_A \frac{1}{3^{\gamma-1}} \quad (9)$$

Ricordando che per un gas biatomico

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} \quad (10)$$

otteniamo

$$T_C = T_A \frac{1}{3^{2/5}} \quad (11)$$

Sostituendo i dati si ottiene

$$\boxed{T_C = 373.15 \text{ K} \frac{1}{3^{2/5}} = 240.46 \text{ K}} \quad (12)$$

5. La trasformazione B→C è adiabatica e non vi è scambio di calore ($Q^{B \rightarrow C} = 0$). Applicando il primo principio della termodinamica alla trasformazione (a) si ha

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} &= \underbrace{Q_{\text{gas}}^{B \rightarrow C}}_{=0} - W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} \\ \Downarrow \\ W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} &= -\Delta U_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} \end{aligned} \quad (13)$$

Siccome in un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura, si ha

$$\begin{aligned} W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} &= -\Delta U_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} = -nc_V(T_C - T_B) = \\ & [c_V = \frac{5}{2} \text{ perché gas è biatomico. Inoltre } T_B = T_A \text{ perché } A \rightarrow B \text{ è isoterma}] \\ &= -n \frac{5}{2} R(T_C - T_A) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori ed usando l'Eq.(12)

$$W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} = -3 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (240.46 - 373.15) \text{ K} \quad (14)$$

si ottiene

$$\boxed{W_{\text{gas}}^{B \rightarrow C} = +8.27 \text{ kJ}} \quad (\text{lavoro eseguito dal gas}) \quad (15)$$

6. La trasformazione $C \rightarrow A$ è isocora in quanto il volume del gas non cambia. Pertanto il calore scambiato dal gas si ottiene tramite il calore specifico a volume costante

$$\begin{aligned} Q_{\text{gas}}^{C \rightarrow A} &= nc_V(T_A - T_C) = \\ & [\text{gas biatomico } c_V = 5R/2] \\ &= n \frac{5}{2} R(T_A - T_C) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori ed usando l'Eq.(12)

$$Q_{\text{gas}}^{C \rightarrow A} = 3 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (373.15 - 240.46) \text{ K} \quad (16)$$

si ottiene

$$\boxed{Q_{\text{gas}}^{C \rightarrow A} = +8.27 \text{ kJ}} \quad (\text{calore assorbito dal gas}) \quad (17)$$

7. La variazione di entropia del gas ideale nella trasformazione $C \rightarrow A$ è data dalla formula

$$\Delta S_{\text{gas}}^{C \rightarrow A} = nc_V \ln \frac{T_A}{T_C} + \underbrace{nR \ln \frac{V_A}{V_C}}_{=0} \quad (18)$$

dove il secondo termine è nullo perché $C \rightarrow A$ è isocora [$V_A = V_C$]. Sfruttando l'Eq.(11) si ricava che $T_A/T_C = 3^{2/5}$. Inoltre, ricordando che $c_V = \frac{5}{2}R$, si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}}^{C \rightarrow A} &= n \frac{5}{2} R \ln \left(3^{2/5} \right) = \\ &= n \frac{5}{2} R \cdot \frac{2}{5} \ln 3 = \\ &= n R \ln 3 \end{aligned} \quad (19)$$

Sostituendo i valori

$$\Delta S_{\text{gas}}^{C \rightarrow A} = 3 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \ln 3 \quad (20)$$

si ottiene

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}}^{C \rightarrow A} = 27.40 \text{ J/K}} \quad (21)$$