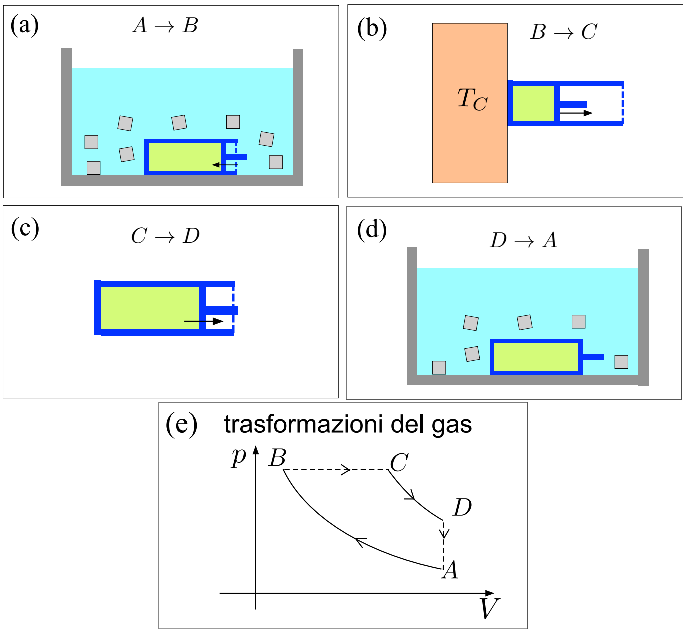
Esercizio (tratto dal Problema 12.24 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un gas ideale monoatomico, costituito da $n = 2$ moli, si trova inizialmente nello stato A di volume $V_A = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, in equilibrio termico con una miscela di acqua e ghiaccio alla temperatura costante di fusione del ghiaccio $T_A = 273.15\,\mathrm{K}$. Tramite una compressione isoterma reversibile, si porta il gas ad un volume $V_B = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ e, a seguito di ciò, si osserva che parte del ghiaccio si scioglie passando dallo stato solido a quello liquido [Fig.(a)]. Il gas viene poi estratto dalla miscela di acqua e ghiaccio e, posto a contatto con un termostato a temperatura $T_C = 519\,\mathrm{K}$, si espande a pressione costante fino a raggiungere la temperatura del termostato [Fig.(b)]. A questo punto il gas viene staccato dal termostato e, per mezzo di un'espansione adiabatica reversibile, raggiunge uno stato D di volume pari al volume iniziale V_A [Fig.(c)]. Infine viene posto nuovamente a contatto con la miscela di acqua e ghiaccio e ritorna tramite un'isocora alla temperatura iniziale [Fig.(d)].



Calcolare:

1. il calore $Q_{\mathrm{gas}}^{A\to B}$ scambiato dal gas durante la trasformazione A$\to B$, specificando se si tratta di calore assorbito o ceduto dal gas;

2. la massa Δm_g di ghiaccio che si scioglie durante la trasformazione A$\to$B del gas, sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio vale $\lambda_{fus} = 3.3 \cdot 10^5\,\mathrm{J/kg}$;

3. il calore $Q_{\mathrm{gas}}^{B\to C}$ scambiato dal gas durante la trasformazione B$\to$C, specificando se si tratta di calore assorbito o ceduto dal gas;

4. la temperatura T_D dello stato D (suggerimento: esprimere prima V_C in termini di T_C e p_B, poi esprimere p_B in termini di T_A e V_B, così da ricavare V_C in termini di T_C, T_A e V_B);

5. il calore $Q_{\mathrm{gas}}^{D\to A}$ scambiato dal gas durante la trasformazione D$\to$A, specificando se si tratta di calore assorbito o ceduto dal gas;

6. il rendimento del ciclo compiuto dal gas [Fig.(e)];

7. la variazione di entropia del termostato durante l'espansione B$\to$C del gas.

SOLUZIONE
Dati noti
$n = 2\,\text{mol}$
$V_A = 5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$,
$V_B = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$;
$T_A = 273.15\,\text{K}$;
$T_C = 519\,\text{K}$;
$\lambda_{fus} = 3.3 \cdot 10^5\,\text{J/kg}$

1. La trasformazione A$\rightarrow B$ compiuta dal gas è un'isoterma che avviene alla temperatura costante $T_A = 273.15\,\text{K}$. Dato che in un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura, durante la trasformazione isoterma A$\rightarrow B$ in cui la temperatura non varia, l'energia interna del gas rimane invariata. Pertanto, per il primo principio

$$\begin{aligned} \underbrace{\Delta U_{\text{gas}}^{A\to B}}_{=0} &= Q_{\text{gas}}^{A\to B} - W_{\text{gas}}^{A\to B} \\ &\Downarrow \\ Q_{\text{gas}}^{A\to B} &= W_{\text{gas}}^{A\to B} \end{aligned} \tag{1}$$

A sua volta, il lavoro lungo l'isoterma si calcola

$$\begin{aligned} W_{\text{gas}}^{A\to B} &= \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = \\ &= \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V}\,dV = \\ &\quad \text{[siccome A}\to\text{B è isoterma, } T \text{ rimane costantemente pari a } T_A\text{, e si può portare fuori]} \\ &= nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = \\ &= nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} \end{aligned}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} Q_{\text{gas}}^{A\to B} &= 2\,\cancel{\text{mol}} \cdot 8.314\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\,\cancel{\text{K}}} \cdot 273.15\,\cancel{\text{K}} \cdot \ln\left(\frac{2\cdot 10^{-3}\,\cancel{\text{m}^3}}{5\cdot 10^{-3}\,\cancel{\text{m}^3}}\right) = \\ &= 4541.94\,\text{J} \cdot \ln\frac{2}{5} \end{aligned} \tag{2}$$

ossia

$$\boxed{Q_{\text{gas}}^{A\to B} = -4.16\,\text{kJ}} \qquad (<0 \;\; \text{calore ceduto dal gas}) \tag{3}$$

2. Il calore ceduto dal gas viene assorbito dalla miscela acqua+ghiaccio

$$Q_{\text{misc}}^{A\to B} = -Q_{\text{gas}}^{A\to B} = +4.16\,\text{kJ} \qquad (>0 \;\; \text{calore assorbito dalla miscela}) \tag{4}$$

Siccome la miscela di acqua e ghiaccio si trova alla temperatura di fusione del ghiaccio, tale calore non viene utilizzato per aumentare la temperatura dell'acqua, ma per effettuare la transizione di fase dallo stato solido allo stato liquido (calore latente). La massa Δm_g di ghiaccio che si scioglie si ricava tramite la relazione

$$Q_{\text{misc}}^{A\to B} = \lambda_{fus}\;\Delta m_g \tag{5}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\Delta m_g &= \frac{Q^{A\to B}_{\text{misc}}}{\lambda_{fus}} = \\ &= \frac{4.16\cdot 10^3\,\cancel{\text{J}}}{3.3\cdot 10^5\,\frac{\cancel{\text{J}}}{\text{kg}}}\end{aligned}$$

Pertanto

$$\boxed{\Delta m_g = 13\cdot 10^{-3}\,\text{kg}} \tag{6}$$

3. La trasformazione B$\rightarrow C$ compiuta dal gas è un'isobara (pressione costante). Pertanto il calore scambiato dal gas si trova utilizzando il calore specifico c_p a pressione costante

$$\begin{aligned}Q^{B\to C}_{\text{gas}} &= nc_p(T_C - T_B) = \\ &\quad [\text{uso } T_B = T_A \text{ perché A}\rightarrow \text{B è isoterma, e } c_p = \tfrac{5}{2}R \text{ (gas monoatomico)}] \\ &= n\,\frac{5}{2}R\,(T_C - T_A) \qquad (7)\end{aligned}$$

Sostituendo i dati

$$Q^{B\to C}_{\text{gas}} = 2\,\text{mo}\cancel{\text{l}}\cdot\frac{5}{2}\cdot 8.314\,\frac{\text{J}}{\text{mo}\cancel{\text{l}}\,\cancel{\text{K}}}\cdot(519-273.15)\,\cancel{\text{K}}$$

ossia

$$\boxed{Q^{B\to C}_{\text{gas}} = 10.22\,\text{kJ}} \qquad (>0 \;\; \text{calore assorbito dal gas}) \tag{8}$$

4. Per calcolare la temperatura dello stato D procediamo in questo modo:

   - Calcoliamo anzitutto il volume V_C sfruttando l'equazione di stato dei gas ideali applicata allo stato C

$$\begin{aligned}p_C V_C &= nRT_C \\ &\Downarrow \\ V_C &= \frac{nRT_C}{p_C} \\ &\Downarrow \quad [\text{uso } p_C = p_B] \\ V_C &= \frac{nRT_C}{p_B} \qquad (9)\end{aligned}$$

   - Possiamo ora valutare anche la pressione pressione p_B sempre usando l'equazione di stato applicata allo stato B

$$\begin{aligned}p_B V_B &= nRT_B \\ &\Downarrow \quad [\text{uso } T_B = T_A] \\ p_B &= \frac{nRT_A}{V_B} \qquad (10)\end{aligned}$$

   Sostituendo (10) in (9) si ottiene

$$V_C = V_B\,\frac{T_C}{T_A} \tag{11}$$

- Sfruttiamo infine il fatto che la trasformazione C→D è adiabatica reversibile, e dunque descritta dalla relazione

$$\begin{aligned} T_C V_C^{\gamma-1} &= T_D V_D^{\gamma-1} \\ &\Downarrow \\ T_D &= T_C \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \end{aligned} \tag{12}$$

Usando $V_D = V_A$, sfruttando l'Eq.(11), e ricordando che per un gas monoatomico

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3} \tag{13}$$

si ottiene

$$T_D = T_C \left(\frac{V_B}{V_A}\frac{T_C}{T_A}\right)^{2/3}$$

Sostituendo i valori

$$T_D = 519\,\mathrm{K}\left(\frac{2\cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}{5\cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}\cdot\frac{519\,\cancel{\mathrm{K}}}{273.15\,\cancel{\mathrm{K}}}\right)^{2/3} \tag{14}$$

si ottiene

$$\boxed{T_D = 432.23\,\mathrm{K}} \tag{15}$$

5. La trasformazione D→A è isocora in quanto il volume del gas non cambia. Pertanto il calore scambiato dal gas si ottiene tramite il calore specifico a volume costante

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{gas}}^{D\to A} &= n c_V (T_A - T_D) = \\ & \quad [\text{gas biatomico } c_V = 3R/2] \\ &= n\frac{3}{2}R\,(T_A - T_D) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori ed usando l'Eq.(15)

$$Q_{\mathrm{gas}}^{D\to A} = 2\,\cancel{\mathrm{mol}}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{mol}}\,\cancel{\mathrm{K}}}(273.15 - 432.23\,\mathrm{K})\,\cancel{\mathrm{K}} \tag{16}$$

si ottiene

$$\boxed{Q_{\mathrm{gas}}^{D\to A} = -3.97\,\mathrm{kJ}} \qquad \text{(calore ceduto dal gas)} \tag{17}$$

6. Il rendimento del ciclo compiuto dal gas si valuta tramite l'espressione

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \tag{18}$$

dove il calore ceduto è dato da $Q_{\mathrm{gas}}^{A\to B}$ [vedi Eq.(3)] e $Q_{\mathrm{gas}}^{D\to A}$ [vedi Eq.(17)], mentre il calore assorbito è dato da $Q_{\mathrm{gas}}^{B\to C}$ [vedi Eq.(8)] (la trasformazione C→D è adiabatica e dunque $Q_{\mathrm{gas}}^{C\to D} = 0$). Pertanto

$$\eta = 1 + \frac{Q_{\mathrm{gas}}^{A\to B} + Q_{\mathrm{gas}}^{D\to A}}{Q_{\mathrm{gas}}^{B\to C}} \tag{19}$$

e, sostituendo i valori, si ottiene

$$\begin{aligned} \eta &= 1 + \frac{-4.16\,\text{kJ} - 3.97\,\text{kJ}}{10.22\,\text{kJ}} = \\ &= 1 - 0.795 \end{aligned} \tag{20}$$

ossia

$$\boxed{\eta = 0.20} \tag{21}$$

7. Durante l'espansione B→C il gas assorbe il calore $Q_{\text{gas}}^{B\to C}$ dal termostato [vedi Eq.(8)]. Pertanto il termostato scambia il calore

$$Q_{\text{term}}^{B\to C} = -Q_{\text{gas}}^{B\to C} = -10.22\,\text{kJ} \qquad (< 0 \ \ \text{calore ceduto dal termostato}) \tag{22}$$

Durante tale trasformazione il termostato (per definizione di termostato) rimane costantemente pari a $T_C = 519\,\text{K}$. La variazione di entropia di un termostato è data da

$$\Delta S_{\text{term}}^{B\to C} = \frac{Q_{\text{term}}^{B\to C}}{T_C} \tag{23}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\Delta S_{\text{term}}^{B\to C} = \frac{-10.22\,\text{kJ}}{519\,\text{K}} \tag{24}$$

ossia

$$\boxed{\Delta S_{\text{term}}^{B\to C} = -19.69\,\text{J/K}} \tag{25}$$