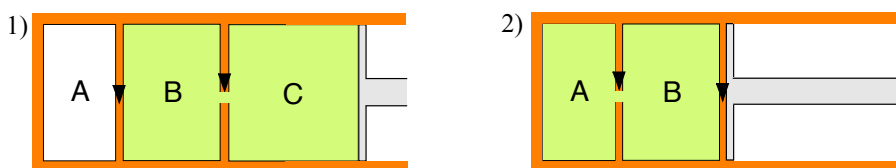


Esercizio (tratto dal Problema 12.14 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un cilindro è diviso in tre compartimenti A, B e C, di volumi rispettivamente $V_A = 10 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$, $V_B = 15 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$ e $V_C = 20 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$. Inizialmente un gas ideale monoatomico ($n = 2$ moli), alla pressione $p_0 = 2$ bar, è distribuito tra i compartimenti B e C, collegati tra loro da un rubinetto tenuto aperto. Il compartimento A, che è comunicante con B tramite un rubinetto inizialmente chiuso, è vuoto [Fig.1].

1. Calcolare la temperatura iniziale T_0 del gas;

Il gas effettua ora tre trasformazioni, qui sotto denotate con (a), (b) e (c). Durante le prime due trasformazioni il materiale di cui sono costituiti l'involucro esterno e i due setti separatori interni (tra A e B e tra B e C) può considerarsi un buon isolante termico, mentre il lato del pistone mostrato a destra in figura è diatermico.



(a) Tramite il pistone, il gas viene compresso con un'isobara reversibile fino a che si trova tutto in B. Calcolare:

2. la temperatura T_B del gas al termine della trasformazione (a);
3. il calore $Q_{\text{gas}}^{(a)}$ scambiato dal gas nella trasformazione (a), precisando se è assorbito o ceduto
4. la variazione $\Delta S_{\text{univ}}^{(a)}$ di entropia dell'universo alla fine della prima trasformazione (a)

(b) In seguito si chiude il rubinetto tra B e C e si apre quello tra A e B, lasciando espandere il gas [Fig.2].

5. Calcolare la temperatura T' del gas al termine della trasformazione (b)

(c) Dopo molto tempo, dato che il materiale isolante termico è buono ma non perfetto, il gas si porta alla temperatura dell'ambiente, che può considerarsi come un termostato a temperatura fissa $T_f = 300$ K.

6. Calcolare il calore $Q_{\text{gas}}^{(c)}$ scambiato dal gas durante la trasformazione (c), precisando se è assorbito o ceduto;
7. Calcolare la variazione $\Delta S_{\text{univ}}^{(c)}$ di entropia dell'universo nella trasformazione (c)

(costante universale dei gas $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$)

SOLUZIONE**Dati noti**

$$n = 2 \text{ mol}$$

$$V_A = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3,$$

$$V_B = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3;$$

$$V_C = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3;$$

$$p_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa};$$

$$T_f = 300 \text{ K}$$

1. Temperatura iniziale T_0

Il gas occupa un volume $V_B + V_C$. Dall'equazione di stato dei gas perfetti abbiamo

$$\begin{aligned} p_0(V_B + V_C) &= nRT_0 \\ &\Downarrow \\ T_0 &= \frac{p_0(V_B + V_C)}{nR} \end{aligned} \quad (1)$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{2 \cdot 10^5 \text{ Pa} (15 + 20) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}} = \\ &= \frac{35}{8.314} \cdot 10^2 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{J}} \text{ K} = \\ &\quad [\text{uso } \frac{\text{Pa m}^3}{\text{J}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ m}^3 \frac{1}{\text{Nm}} = 1] \\ &= 421.0 \text{ K} \end{aligned} \quad (2)$$

2. Compressione isobara $V_{B+C} \rightarrow V_B$

Al termine della trasformazione (a) il gas occupa solo il volume V_B . Dato che la compressione è isobara (=avviene a pressione costante), si ha

$$p_B = p_0 \quad (3)$$

Dall'equazione di stato dei gas ideali si ha

$$\begin{aligned} p_B V_B &= nRT_B \\ &\Downarrow \\ T_B &= \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{p_0 V_B}{nR} \end{aligned} \quad (4)$$

Sostituendo i valori, otteniamo la temperatura

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}} = \\ &= \frac{15}{8.314} \cdot 10^2 \text{ Pa} \frac{\text{m}^3}{\text{J}} \text{ K} = \\ &\quad [\text{uso } \text{Pa} \frac{\text{m}^3}{\text{J}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}^3}{\text{Nm}} = 1] \\ &= 180.4 \text{ K} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\boxed{T_B = 180.4 \text{ K}} \quad (6)$$

3. Dato che la compressione avviene a pressione costante, il calore $Q^{(a)}$ scambiato dal gas è dato da

$$\begin{aligned} Q_{\text{gas}}^{(a)} &= nc_p(T_B - T_0) = \\ &\quad [\text{gas monoatomico} \rightarrow c_p = \frac{5}{2}R] \\ &= \frac{5}{2} nR(T_B - T_0) \end{aligned} \quad (7)$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} Q_{\text{gas}}^{(a)} &= \frac{5}{2} \cdot 2 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (180.4 - 421.0) \text{ K} = \\ &= -10.00 \cdot 10^3 \text{ J} \quad (\text{calore ceduto}) \end{aligned} \quad (8)$$

4. Variazione entropia dell'universo in (a)

La prima trasformazione (compressione isobara) è reversibile. Pertanto l'entropia dell'universo non varia

$$\Delta S_{\text{univ}}^{(a)} = 0 \quad (9)$$

(si noti che vale quindi $\Delta S_{\text{amb}}^{(a)} = -\Delta S_{\text{gas}}^{(a)}$)

5. Espansione libera $V_B \rightarrow V_{A+B}$

Dato che i comparti A e B coinvolti nell'espansione possono considerarsi adiabatici, si ha

$$Q_{\text{gas}}^{(b)} = 0 \quad (10)$$

Pertanto la variazione di energia interna è

$$\Delta U^{(b)} = \underbrace{Q_{\text{gas}}^{(b)}}_{=0 \text{ perché adiab.}} - \underbrace{W_{\text{gas}}^{(b)}}_{=0 \text{ perché libera}} = 0 \quad (11)$$

Dato che il gas è ideale, l'energia interna dipende solo dalla temperatura e la sua variazione è

$$\Delta U^{(b)} = nc_V(T' - T_B) \quad (12)$$

Pertanto, siccome l'energia interna non varia, non varia nemmeno la temperatura, e dunque al termine dell'espansione libera (b) la temperatura rimane pari a T_B .

$$\boxed{T' = T_B = 180.4 \text{ K}} \quad (13)$$

6. Calore scambiato in (c)

In questa trasformazione, che avviene su un tempo molto lungo, il non perfetto isolamento termico si manifesta. E' una trasformazione isocora non adiabatica. Il gas, che si trova alla temperatura $T_B = 180.4 \text{ K}$ [vedi Eq.(5)] assorbe calore dall'ambiente che si trova a $T_f = 300 \text{ K}$, portandosi anch'esso a tale temperatura. Dato che la trasformazione avviene a volume costante, il calore $Q^{(c)}$ scambiato dal gas è dato da

$$\begin{aligned} Q_{\text{gas}}^{(c)} &= nc_V(T_f - T') = \\ &\quad [\text{gas monoatomico} \rightarrow c_V = \frac{3}{2}R] \\ &= \frac{3}{2} nR(T_f - T') \end{aligned} \quad (14)$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} Q_{\text{gas}}^{(c)} &= \frac{3}{2} \cdot 2 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (300 - 180.4) \text{ K} = \\ &= 2.98 \cdot 10^3 \text{ J} \quad (\text{calore assorbito}) \end{aligned} \quad (15)$$

7. Variazione entropia dell'universo in (c)

La variazione di entropia dell'universo in (c) è data da

$$\Delta S_{\text{univ}}^{(c)} = \Delta S_{\text{amb}}^{(c)} + \Delta S_{\text{gas}}^{(c)} \quad (16)$$

Calcoliamo i due contributi di ambiente e gas

- **Ambiente**

Durante la trasformazione (c) si comporta come un termostato alla temperatura costante $T_f = 300 \text{ K}$ che cede calore al gas. La sua variazione di entropia è

$$\Delta S_{\text{amb}}^{(c)} = \frac{Q_{\text{amb}}^{(c)}}{T_f} \quad (17)$$

Il calore scambiato dall'ambiente col gas è uguale ed opposto al calore scambiato dal gas con l'ambiente: il gas assorbe calore ($Q_{\text{gas}}^{(c)} > 0$) e l'ambiente lo cede al gas ($Q_{\text{amb}}^{(c)} = -Q_{\text{gas}}^{(c)} < 0$). Pertanto

$$\Delta S_{\text{amb}}^{(c)} = \frac{-Q_{\text{gas}}^{(c)}}{T_f} \quad (18)$$

Sostituendo i valori [vedi Eq.(14) e dati noti] si ha

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{amb}}^{(c)} &= \frac{-2.98 \cdot 10^3 \text{ J}}{300 \text{ K}} = \\ &= -9.93 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned} \quad (19)$$

- **Gas**

Per quanto riguarda il gas, applichiamo la formula di variazione di entropia del gas ideale

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}}^{(c)} &= n c_V \ln \frac{T_f}{T'} + n R \ln \underbrace{\frac{V_A + V_B}{V_A + V_B}}_{=0} = \\ & \quad [\text{gas monoatomico} \rightarrow c_V = \frac{3}{2} R] \\ &= \frac{3}{2} n R \ln \frac{T_f}{T'} \end{aligned} \quad (20)$$

Sostituendo i valori [vedi Eq.(5) e dati noti] si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}}^{(c)} &= \frac{3}{2} \cdot 2 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \ln \left(\frac{300 \text{ K}}{180.4 \text{ K}} \right) = \\ &= 12.69 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned} \quad (21)$$

Sostituendo i contributi (19) e (21) in (16) si ottiene

$$\Delta S_{\text{univ}}^{(c)} = -9.93 \frac{\text{J}}{\text{K}} + 12.69 \frac{\text{J}}{\text{K}} = 2.76 \frac{\text{J}}{\text{K}} > 0 \quad (22)$$

che è positivo come ci si aspetta dopo una trasformazione irreversibile.