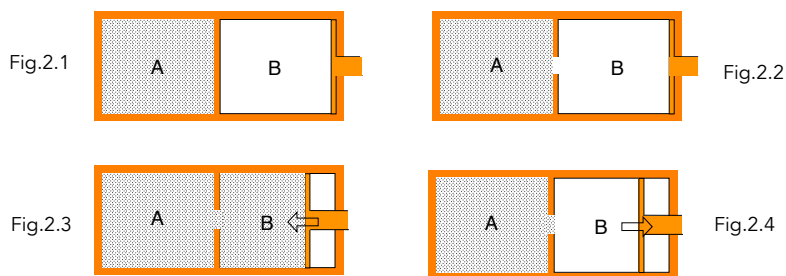


Esercizio

Un recipiente rigido e adiabatico è diviso in due parti A e B da un setto diatermico fisso. I volumi delle due parti sono uguali, $V_A = V_B = 10^{-2} \text{m}^3$. In A è contenuta $n = 1$ mole di un gas ideale monoatomico, alla temperatura $T_0 = 300 \text{K}$, mentre in B c'è il vuoto [Fig.2.1].

(a) Ad un certo istante si apre un buco nel setto diatermico [Fig.2.2], ed il gas fluisce liberamente fino ad occupare l'intero volume del recipiente. Si attende che venga raggiunto nuovamente l'equilibrio termodinamico.

1. Quanto vale la temperatura T_1 del gas al termine di questa espansione?



(b) All'estremità destra del volume B c'è un pistone adiabatico che può scorrere senza attrito dentro al recipiente. Si usa il pistone per comprimere molto lentamente e reversibilmente il gas, confinandolo nuovamente nella sola parte A [Fig.2.3].

2. Quanto vale la temperatura T_2 del gas al termine di questa compressione ?
 3. Calcolare il lavoro $W^{(b)}$ scambiato dal gas durante questa trasformazione, specificando se si tratta di lavoro eseguito o subito dal gas.
- (c) Dopo aver estratto molto rapidamente il pistone riportandolo alla sua posizione iniziale [Fig.2.4], il gas si espande nuovamente liberamente fino ad occupare tutto il volume.
4. Calcolare la variazione $\Delta S_{\text{gas}}^{(c)}$ di entropia del gas durante questa trasformazione.
- (d) Si usa nuovamente il pistone per ricomprimere ancora una volta il gas, sempre molto lentamente e reversibilmente, confinandolo ancora nella sola parte A
5. Quanto vale la temperatura T_3 al termine di questa quarta trasformazione ?
 6. Calcolare il lavoro $W^{(d)}$ scambiato dal gas durante questa trasformazione, specificando se si tratta di lavoro eseguito o subito dal gas e se il suo valore assoluto è più grande o più piccolo di quello del lavoro della trasformazione (b);
 7. Calcolare la variazione di entropia $\Delta S_{\text{gas}}^{(d)}$ del gas al termine di questa trasformazione;
 8. Calcolare la variazione di entropia $\Delta S_{\text{univ}}^{\text{tot}}$ complessiva dell'universo al termine di tutte le trasformazioni (a)+(b)+(c)+(d).

(costante universale dei gas $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$)

SOLUZIONE**Dati noti:**

$$n = 1 \text{ mol};$$

$$T_0 = 300 \text{ K};$$

$$V_A = V_B = 10^{-2} \text{ m}^3$$

1. La prima trasformazione (a) è un'espansione adiabatica (no scambio di calore) libera nel vuoto (il gas non fa lavoro contro alcunché). Per il primo principio abbiamo

$$\Delta U^{(a)} = \underbrace{Q^{(a)}}_{=0 \text{ perché adiab.}} - \underbrace{W^{(a)}}_{=0 \text{ perché libera}} = 0 \quad (1)$$

Dato che in un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura $\Delta U^{(a)} = nc_V(T_1 - T_0)$, il fatto che l'energia interna non vari, implica che anche la temperatura non vari, e dunque

$$T_1 = T_0 = 300 \text{ K} \quad (2)$$

2. La seconda trasformazione (b) è una compressione adiabatica reversibile. Essendo reversibile è ovviamente quasi-statica, con temperatura iniziale $T_1 = T_0$ (nota) e temperatura finale T_2 (incognita). Dato che conosciamo i volumi iniziale e finale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} TV^{\gamma-1} &= \text{cost} \\ \Downarrow \\ \underbrace{T_2 V_A^{\gamma-1}}_{\text{finale}} &= \underbrace{T_1 (2V_A)^{\gamma-1}}_{\text{iniziale}} \\ \Downarrow \text{ [uso } T_1 = T_0 \text{]} \\ T_2 &= T_0 \left(\frac{2V_A}{V_A} \right)^{\gamma-1} \\ \Downarrow \\ T_2 &= T_0 2^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (3)$$

dove

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} \quad (\text{gas monoatomico}) \quad (4)$$

e dunque

$$\boxed{T_2 = T_0 2^{2/3}} \quad (5)$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$T_2 = 300 \text{ K} \cdot 1.587 = 476.2 \text{ K} \quad (6)$$

3. Dato che la trasformazione (b) è una trasformazione adiabatica, per il primo principio il lavoro è pari a (meno) la variazione dell'energia interna

$$\begin{aligned} \Delta U^{(b)} &= \underbrace{Q^{(b)}}_{=0 \text{ perché adiab.}} - W^{(b)} \\ \Downarrow \\ nc_V(T_2 - T_0) &= -W^{(b)} \\ \text{[uso } c_V = \frac{3}{2}R \text{ (gas monoatomico)] } \Downarrow \\ n \frac{3}{2}R(T_2 - T_0) &= -W^{(b)} \end{aligned} \quad (7)$$

da cui

$$W^{(b)} = n \frac{3}{2} R (T_0 - T_2) \quad (8)$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$W^{(b)} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (300 - 476.2) \text{ K} = -2197 \text{ J} \quad (\text{lavoro subito dal gas}) \quad (9)$$

4. La terza trasformazione (c) è nuovamente un'espansione adiabatica libera. Pertanto, esattamente come durante la trasformazione (a), l'energia interna e la temperatura non variano alla fine di tale trasformazione.

$$\begin{aligned} \Delta U^{(c)} &= \underbrace{Q^{(a)}}_{=0 \text{ perché adiab.}} - \underbrace{W^{(a)}}_{=0 \text{ perché libera}} = 0 \\ &\Downarrow \\ T_2' &= T_2 \end{aligned} \quad (10)$$

Anche se il gas non scambia calore durante questa trasformazione, l'entropia del gas varia perché, trattandosi di una trasformazione irreversibile, non possiamo usare il δQ_{irr} (che peraltro è nullo) per calcolare l'entropia. Applicando la formula di variazione di entropia del gas perfetto abbiamo

$$\Delta S_{\text{gas}}^{(c)} = n c_V \ln \underbrace{\frac{T_2'}{T_2}}_{=0} + n R \ln \frac{2V_A}{V_A} \quad (11)$$

ossia

$$\Delta S_{\text{gas}}^{(c)} = n R \ln 2 \quad (12)$$

Sostituendo i valori

$$\Delta S_{\text{gas}}^{(c)} = 1 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \ln 2 = 5.76 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (13)$$

5. La quarta trasformazione (d) è nuovamente una compressione adiabatica reversibile. Essendo reversibile è ovviamente quasi-statica, con temperatura iniziale T_2 (nota) e temperatura finale T_3 (incognita). Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} TV^{\gamma-1} &= \text{cost} \\ &\Downarrow \\ \underbrace{T_3 V_A^{\gamma-1}}_{\text{finale}} &= \underbrace{T_2 (2V_A)^{\gamma-1}}_{\text{iniziale}} \\ &\Downarrow \\ T_3 &= T_2 \left(\frac{2V_A}{V_A} \right)^{\gamma-1} \\ &\Downarrow \\ T_3 &= T_2 2^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (14)$$

dove γ è dato dall'Eq.(4). e dunque

$$T_3 = T_2 2^{2/3} \quad (15)$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$T_3 = 476.2 \text{ K} \cdot 1.587 = 755.7 \text{ K} \quad (16)$$

6. Similmente alla trasformazione (b), anche la trasformazione (d) è una trasformazione adiabatica, e per il primo principio il lavoro è pari a (meno) la variazione dell'energia interna

$$\begin{aligned}\Delta U^{(d)} &= \underbrace{Q^{(d)}}_{=0 \text{ perché adiab.}} - W^{(d)} \\ &\Downarrow \\ nc_V(T_3 - T_2) &= -W^{(d)} \\ [\text{uso } c_V = \frac{3}{2}R \text{ (gas monoatomico)}] &\Downarrow \\ n\frac{3}{2}R(T_3 - T_2) &= -W^{(d)}\end{aligned}\quad (17)$$

da cui

$$\boxed{W^{(d)} = n\frac{3}{2}R(T_2 - T_3)} \quad (18)$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$W^{(d)} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (476.2 - 755.7) \text{ K} = -3486 \text{ J} \quad (\text{lavoro subito dal gas}) \quad (19)$$

Confrontando (19) con l'Eq.(9) osserviamo che nella seconda compressione il gas subisce un lavoro superiore (in modulo) a quello della prima compressione.

7. Dato che la trasformazione (d) è una trasformazione adiabatica reversibile, la variazione di entropia del gas è nulla

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}}^{(d)} = 0} \quad (20)$$

come è anche possibile verificare applicando la formula della variazione di entropia dei gas perfetti

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{gas}}^{(d)} &= nc_V \ln \frac{T_3}{T_2} + nR \ln \frac{V_A}{2V_A} = \\ &[c_V = \frac{3}{2}R \text{ (gas monoatomico)}] \\ &= nR \left(\frac{3}{2} \ln \frac{T_3}{T_0} + \ln \frac{1}{2} \right) = \\ &= 1 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \underbrace{\left(\frac{3}{2} \ln \left(\frac{755.7 \text{ K}}{476.2 \text{ K}} \right) - \ln 2 \right)}_{=0} = 0\end{aligned}\quad (21)$$

8. La variazione di entropia $\Delta S_{\text{univ}}^{\text{tot}}$ complessiva dell'universo è data da

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{univ}}^{\text{tot}} &= \Delta S_{\text{gas}}^{\text{tot}} + \underbrace{\Delta S_{\text{amb}}^{\text{tot}}}_{=0} = \\ &= \Delta S_{\text{gas}}^{\text{tot}}\end{aligned}\quad (22)$$

dove la variazione totale dell'entropia dell'ambiente è nulla perché l'ambiente rimane sempre sconnesso termicamente dal gas e non subisce trasformazioni. Per calcolare la variazione di entropia del gas possiamo fare in due modi

- **Primo modo**

Siccome l'entropia è una funzione di stato, la variazione è determinata unicamente dagli stati iniziale e finale del gas

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{univ}}^{\text{tot}} &= \Delta S_{\text{gas}}^{\text{tot}} = \\ &= n c_V \ln \frac{T_3}{T_0} + \underbrace{n R \ln \frac{V_A}{V_A}}_{=0} = \\ &= n \frac{3}{2} R \ln \frac{T_3}{T_0}\end{aligned}\quad (23)$$

Sostituendo i valori

$$\Delta S_{\text{univ}}^{\text{tot}} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \ln \left(\frac{755.7 \text{ K}}{300 \text{ K}} \right) = 11.52 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (24)$$

- **Secondo modo**

Possiamo sommare le variazioni di entropia nelle varie trasformazioni:

$$\Delta S_{\text{gas}}^{\text{tot}} = \Delta S_{\text{gas}}^{(a)} + \Delta S_{\text{gas}}^{(b)} + \Delta S_{\text{gas}}^{(c)} + \Delta S_{\text{gas}}^{(d)} \quad (25)$$

dove

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{gas}}^{(a)} &= n c_V \ln \frac{T_1}{T_0} + n R \ln \frac{2V_A}{V_A} = n R \ln 2 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} \\ \Delta S_{\text{gas}}^{(b)} &= 0 \quad (\text{perché adiab. reversibile}) \\ \Delta S_{\text{gas}}^{(c)} &= n c_V \ln \frac{T'_2}{T_2} + n R \ln \frac{2V_A}{V_A} = n R \ln 2 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} \\ \Delta S_{\text{gas}}^{(d)} &= 0 \quad (\text{perché adiab. reversibile})\end{aligned}\quad (26)$$

Pertanto

$$\boxed{\Delta S_{\text{univ}}^{\text{tot}} = 2nR \ln 2} \quad (27)$$

Sostituendo i valori

$$\Delta S_{\text{univ}}^{\text{tot}} = 2 \cdot 1 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \ln 2 = 11.52 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (28)$$

ed è positiva, come è ovvio aspettarsi dato che 2 delle 4 trasformazioni effettuate dal gas sono irreversibili.