

### Esercizio (tratto dal Problema 12.13 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un contenitore perfettamente adiabatico è diviso in due parti di ugual volume  $V_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  da una parete fissa costituita da un buon isolante termico, che in prima approssimazione si può considerare anch'esso adiabatico. I due volumi sono occupati da due gas ideali: nella parte destra si trova idrogeno ( $\text{H}_2$ , biatomico) e nella parte sinistra si trova elio ( $\text{He}$ , monoatomico). Inizialmente la pressione e la temperatura hanno gli stessi valori  $p_0 = 10.13 \text{ bar}$  e  $T_0 = 273.2 \text{ K}$  da entrambe le parti.

1. Calcolare il numero di moli di idrogeno e il numero di moli di elio
- (a) Tramite una resistenza elettrica posta all'interno del volume destro viene ceduto all'idrogeno il calore  $Q^{(a)} = 2 \cdot 10^3 \text{ J}$  [Fig.2.1].
  2. Calcolare la temperatura  $T_1$  dell'idrogeno al termine della trasformazione (a);
  3. Calcolare la pressione  $p_1$  dell'idrogeno al termine della trasformazione (a);
- (b) Successivamente l'elio viene compresso in modo adiabatico reversibile [Fig.2.2], fino a che la pressione uguaglia quella raggiunta dall'idrogeno nella trasformazione (a).
  4. Calcolare il volume  $V_2$  dell'elio al termine della trasformazione (b);
  5. Calcolare la temperatura  $T_2$  dell'elio al termine della trasformazione (b);
- (c) Aspettando un tempo molto lungo, a causa del fatto che il setto separatore è un isolante termico buono ma non ideale, i due gas raggiungono l'equilibrio termico tra loro.
  6. Calcolare la temperatura finale  $T_f$  dei due gas;
  7. Calcolare la variazione di entropia dell'idrogeno tra lo stato iniziale  $(p_0, V_0, T_0)$  e il suo stato finale;
  8. Calcolare la variazione di entropia dell'elio tra lo stato iniziale  $(p_0, V_0, T_0)$  e il suo stato finale.

Fig 2.1

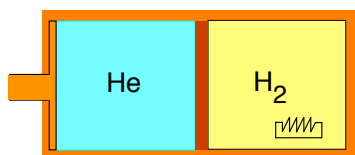
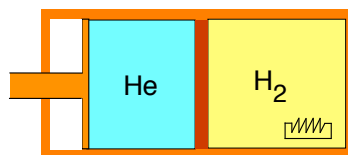


Fig 2.2



(costante universale dei gas  $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$ )

**SOLUZIONE****Dati noti:**

$$p_0 = 10.13 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_0 = 273.2 \text{ K}$$

$$Q^{(a)} = 2 \cdot 10^3 \text{ J}$$

1. Dall'equazione di stato dei gas perfetti applicata allo stato iniziale abbiamo, per ciascuno dei due gas

$$p_0 V_0 = n R T_0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \quad (1)$$

ed è lo stesso numero di moli per i due gas, dato che tutte le variabili termodinamiche (pressione, temperatura e volume) sono uguali. Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} n &= \frac{p_0 V_0}{R T_0} = \\ &= \frac{10.13 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 273.2 \text{ K}} = \\ &= \frac{20.26 \cdot 10^2}{8.314 \cdot 273.2} \text{ mol} \frac{\text{Pa m}^3}{\text{J}} = \\ &\quad [\text{uso } \text{Pa m}^3 = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3 = \text{N m} = \text{J}] \\ &= 0.892 \text{ mol} \end{aligned} \quad (2)$$

2. L'idrogeno assorbe il calore  $Q$  dal riscaldatore elettrico. Pertanto, dato che l'idrogeno non compie lavoro in questa trasformazione (il suo volume non cambia), si ha

$$\begin{aligned} \Delta U^{(a)} &= \underbrace{Q^{(a)}}_{\text{noto}} - \underbrace{W^{(a)}}_{=0} \\ &\Downarrow \\ n c_V (T_1 - T_0) &= Q^{(a)} \\ &\Downarrow \\ T_1 - T_0 &= \frac{Q^{(a)}}{n c_V} \\ &\Downarrow [\text{uso } c_V = \frac{5}{2} R \text{ (biatomico)}] \\ T_1 &= T_0 + \frac{2 Q^{(a)}}{5 n R} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori si ottiene la temperatura dell'idrogeno

$$\begin{aligned} T_1 &= 273.2 \text{ K} + \frac{2}{5} \frac{2 \cdot 10^3 \text{ J}}{0.892 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = \\ &= 273.2 \text{ K} + 107.9 \text{ K} = \\ &= 381.1 \text{ K} \end{aligned} \quad (3)$$

3. La pressione  $p_1$  dell'idrogeno al termine della trasformazione (a) si ottiene semplicemente dall'equazione di stato

$$p_1 V_0 = n R T_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{n R T_1}{V_0} \quad (4)$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{0.892 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 381.1 \text{ K}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = \\
 &= 14.13 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\text{Pa}} \\
 &= 14.13 \cdot 10^5 \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{5}$$

4. Siccome la trasformazione dell'elio è adiabatica reversibile, è anche certamente quasi-statica. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
 p_0 V_0^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \\
 \downarrow [p_2 = p_1 \text{ come dice il testo}] \\
 \frac{p_0}{p_1} &= \left( \frac{V_2}{V_0} \right)^\gamma \\
 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{1/\gamma} &= \frac{V_2}{V_0} \\
 \downarrow \\
 V_2 &= V_0 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{1/\gamma}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ricordando che l'elio è un gas monoatomico, si ha

$$\gamma(\text{He}) = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} \tag{7}$$

si ha

$$V_2 = V_0 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{3/5} \tag{8}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{aligned}
 V_2 &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \left( \frac{10.13 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{14.13 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \right)^{3/5} = \\
 &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 0.819 = \\
 &= 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3
 \end{aligned} \tag{9}$$

5. La temperatura dell'elio al termine della trasformazione (b) si può determinare attraverso l'equazione di stato

$$p_1 V_2 = nRT_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{p_1 V_2}{nR} \tag{10}$$

Sostituendo i valori si ottiene la temperatura dell'elio:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{14.13 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{0.892 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = \\
 &= 312.5 \text{ K} \frac{\text{Pa m}^3}{\underbrace{\text{J}}_{=1}} = \\
 &= 312.5 \text{ K}
 \end{aligned} \tag{11}$$

6. Osserviamo che, dopo le trasformazioni (a) e (b), l'idrogeno e l'elio si trovano a due temperature diverse

$$\begin{cases} \text{H}_2 : T_1 = 381.1 \text{ K} \\ \text{He} : T_2 = 312.5 \text{ K} \end{cases} \quad (12)$$

Aspettando un tempo lungo il calore passa attraverso il setto, e l'idrogeno cede calore e l'elio lo assorbe. Questi scambi di calori avvengono a volume costante. Il contenitore esterno è perfettamente adiabatico. Pertanto, tutto il calore che ceduto dall'elio è assorbito dall'idrogeno

$$\begin{aligned} Q_{\text{H}_2} + Q_{\text{He}} &= 0 \\ \Downarrow \\ n c_V(\text{H}_2)(T_f - T_1) + n c_V(\text{He})(T_f - T_2) &= 0 \\ \Downarrow [c_V(\text{H}_2) = \frac{5}{2}R \text{ e } c_V(\text{He}) = \frac{3}{2}R] \\ n \frac{5}{2}R(T_f - T_1) + n \frac{3}{2}R(T_f - T_2) &= 0 \\ \Downarrow \\ 5(T_f - T_1) + 3(T_f - T_2) &= 0 \\ \Downarrow \\ 8T_f &= 5T_1 + 3T_2 \end{aligned} \quad (13)$$

da cui si ottiene

$$T_f = \frac{5T_1 + 3T_2}{8} \quad (14)$$

Sostituendo i valori si ottiene la temperatura dell'elio:

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{5 \cdot 381.1 \text{ K} + 3 \cdot 312.5 \text{ K}}{8} = \\ &= 355.4 \text{ K} \end{aligned} \quad (15)$$

7. Per calcolare la variazione di entropia dell'idrogeno applichiamo la formula per i gas perfetti

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{H}_2} &= n c_V(\text{H}_2) \ln \frac{T_f}{T_0} + \underbrace{nR \ln \frac{V_0}{V_0}}_{=0} = \\ &= nR \frac{5}{2} \ln \frac{T_f}{T_0} \end{aligned} \quad (16)$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{H}_2} &= 0.892 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \frac{5}{2} \ln \frac{355.4 \text{ K}}{273.2 \text{ K}} = \\ &= 4.88 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned} \quad (17)$$

8. La variazione di entropia dell'elio si può calcolare in due modi equivalenti:

- **Primo modo**

E' il modo analogo a quello usato per l'idrogeno:

$$\begin{aligned}
 \Delta S_{\text{He}} &= n c_V(\text{He}) \ln \frac{T_f}{T_0} + nR \ln \frac{V_2}{V_0} = \\
 &= n \frac{3}{2} R \ln \frac{T_f}{T_0} + nR \ln \frac{V_2}{V_0} = \\
 &= nR \left( \frac{3}{2} \ln \frac{T_f}{T_0} + \ln \frac{V_2}{V_0} \right) \quad (18)
 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 \Delta S_{\text{He}} &= 0.892 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{355.4 \text{ K}}{273.2 \text{ K}} + \ln \frac{1.64 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} \right) = \\
 &= 1.45 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (19)
 \end{aligned}$$

• **Secondo modo**

$$\begin{aligned}
 \Delta S_{\text{He}} &= \Delta S_{\text{He}}^{(a)} + \Delta S_{\text{He}}^{(b)} + \Delta S_{\text{He}}^{(c)} = \\
 &[\Delta S_{\text{He}}^{(a)} = 0 \text{ perché l'elio non è interessato dalla trasformazione (a)}] \\
 &[\Delta S_{\text{He}}^{(b)} = 0 \text{ perché (b) è un'adiabatica reversibile}] \\
 &= \Delta S_{\text{He}}^{(c)} = \\
 &= n c_V(\text{He}) \ln \frac{T_f}{T_2} + \underbrace{nR \ln \frac{V_f}{V_2}}_{=0 \text{ per l'elio } V_f = V_2} = \\
 &[\text{uso } c_V(\text{He}) = \frac{3}{2} R ] \\
 &= \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_f}{T_2} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 \Delta S_{\text{He}} &= \frac{3}{2} \cdot 0.892 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \ln \frac{355.4 \text{ K}}{312.5 \text{ K}} = \\
 &= 1.43 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (21)
 \end{aligned}$$

che è uguale al risultato ottenuto col primo metodo [a meno di errori dell'1 % dovuti agli arrotondamenti]