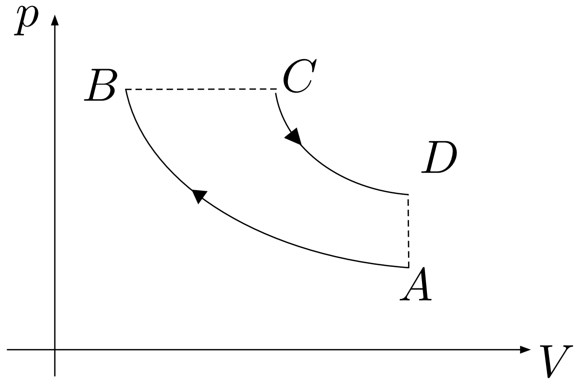
Esercizio (tratto dal Problema 12.24 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Due moli di gas ideale monoatomico, inizialmente nello stato di volume $V_A = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ e temperatura $T_A = 273.2\,\mathrm{K}$, eseguono una trasformazione isoterma reversibile a contatto con una miscela di acqua e ghiaccio, fino al volume $V_B = 2 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3$. Successivamente il gas viene posto a contatto con una sorgente a temperatura $T_C = 519\,\mathrm{K}$ fino a raggiungere, a pressione costante, l'equilibrio termico. Quindi, per mezzo di un'adiabatica reversibile, il gas ritorna al volume iniziale e infine, posto a contatto con la miscela di acqua e ghiaccio, ritorna tramite un'isocora anche alla temperatura iniziale. Calcolare per un ciclo:

1. quanti grammi di ghiaccio si sciolgono;
2. il lavoro compiuto dal gas e il rendimento del ciclo;
3. la variazione di entropia dell'universo

[calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda = 3.3 \cdot 10^5$ J/Kg].



SOLUZIONE

Dati Noti:
$V_A = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$
$T_A = 273.2\,\mathrm{K}$
$V_B = 2 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3$
$T_C = 519\,\mathrm{K}$
$\lambda = 3.3 \cdot 10^5\ \mathrm{J/Kg}$

1. Iniziamo calcolando le variabili termodinamiche dei 4 stati, che possono tornarci utili in seguito.

   - **Stato A**
     Conosciamo V_A e T_A. Dall'equazione di stato abbiamo

     $$p_A V_A = nRT_A \qquad \Rightarrow \qquad p_A = \frac{nRT_A}{V_A} \tag{1}$$

     da cui

     $$\begin{aligned} p_A &= \frac{2\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l}\ \cancel{\mathrm{K}}}\,273.2\,\cancel{\mathrm{K}}}{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = \\ &\quad [\text{uso } \mathrm{J} = \mathrm{N\,m}] \\ &= 908.5 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \\ &= 9.09 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{2}$$

   - **Stato B**
     Dal testo sappiamo che $A \to B$ è isoterma. Pertanto

     $$T_B = T_A = 273.2\,\mathrm{K} \tag{3}$$

     e dall'equazione di stato

     $$p_B V_B = nRT_B \qquad \Rightarrow \qquad p_B = \frac{nRT_B}{V_B} \tag{4}$$

     da cui

     $$\begin{aligned} p_B &= \frac{2\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l}\ \cancel{\mathrm{K}}}\,273.2\,\cancel{\mathrm{K}}}{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = \\ &\quad [\text{uso } \mathrm{J} = \mathrm{N\,m}] \\ &= 2271 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \\ &= 22.7 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{5}$$

   - **Stato C**
     Conosciamo T_C. Dal testo sappiamo inoltre che $B \to C$ è isobara. Pertanto

     $$p_C = p_B = 22.7 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{6}$$

     e dall'equazione di stato

     $$p_C V_C = nRT_C \qquad \Rightarrow \qquad V_C = \frac{nRT_C}{p_C} \tag{7}$$

da cui

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{2\,\cancel{\text{mol}}\;\cdot 8.314\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\;\cancel{\text{K}}}\,519\,\cancel{\text{K}}}{22.7\cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = \\ &\quad [\text{uso J} = \text{N m}] \\ &= 3.8\cdot 10^{-3}\,\frac{\cancel{\text{N}}\,\text{m}^3}{\cancel{\text{N}}} \\ &= 3.8\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \end{aligned} \tag{8}$$

- **Stato D**
  Dal testo sappiamo che $D \to A$ è isocora. Pertanto

$$V_D = V_A = 5\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \tag{9}$$

  Inoltre sappiamo che $C \to D$ è adiabatica reversibile. Pertanto

$$p_C V_C^\gamma = p_D V_D^\gamma \qquad \Rightarrow \qquad p_D = p_C \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma \tag{10}$$

  con $\gamma = c_p/c_V = \frac{5}{2}R/\frac{3}{2}R = 5/3$ (gas monoatomico). Pertanto

$$\begin{aligned} p_D &= p_C \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma = \\ &\quad [\text{uso J} = \text{N m}] \\ &= 22.7\cdot 10^5\,\text{Pa}\left(\frac{3.8\cdot 10^{-3}\,\cancel{\text{m}^3}}{5\cdot 10^{-3}\,\cancel{\text{m}^3}}\right)^{5/3} \\ &= 14.4\cdot 10^5\,\text{Pa} \end{aligned} \tag{11}$$

  Infine, dall'equazione di stato,

$$p_D V_D = nRT_D \qquad \Rightarrow \qquad T_D = \frac{p_D V_D}{nR} \tag{12}$$

  da cui

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{14.4\cdot 10^5\,\text{Pa}\cdot 5\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{2\,\cancel{\text{mol}}\;\cdot 8.314\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\;\text{K}}} = \\ &= 433\,\frac{\text{Pa}\,\text{m}^3}{\text{J}}\,\text{K} \\ &\quad [\text{uso Pa m}^3 = \tfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\text{m}^3 = \text{N m} = \text{J}] \\ &= 433\,\text{K} \end{aligned} \tag{13}$$

2. Calcoliamo ora i calori scambiati nelle varie trasformazioni

- **Trasformazione A $\to$ B**
  E' un'isoterma, pertanto in questa trasformazione l'energia interna del gas ideale non cambia (l'energia interna di un gas ideale dipende solo dalla temper-

atura, e dunque non varia se la temperatura non varia). dal primo principio

$$\begin{aligned} \Delta U^{A\to B} &= Q^{A\to B} - W^{A\to B} = 0 \\ &\Downarrow \\ Q^{A\to B} &= W^{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \\ &= \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = \\ & \quad [T = T_A = T_B = \text{cost in un'isoterma}] \\ &= nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = \\ &= nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \end{aligned} \tag{14}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} Q^{A\to B} &= 2\,\cancel{\text{mol}} \cdot 8.314\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\ \cancel{\text{K}}} \cdot 273.2\,\cancel{\text{K}}\ \ln \frac{2\cdot 10^{-3}\,\cancel{\text{m}^3}}{5\cdot 10^{-3}\cancel{\text{m}^3}} = \\ &= -4162\,\text{J} = \\ &= -4.16\,\text{kJ} \quad \text{(calore ceduto)} \end{aligned} \tag{15}$$

- **Trasformazione B → C**
  Si tratta di una trasformazione a pressione costante. Pertanto il calore è dato da

$$\begin{aligned} Q^{B\to C} &= nc_p(T_C - T_B) = \\ &= n\frac{5}{2}R(T_C - T_B) \end{aligned} \tag{16}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} Q^{B\to C} &= 2\,\cancel{\text{mol}}\frac{5}{2} \cdot 8.314\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\ \cancel{\text{K}}}(519\,\cancel{\text{K}} - 273.2\,\cancel{\text{K}}) = \\ &= 10218\,\text{J} = \\ &= 10.22\,\text{kJ} \quad \text{(calore assorbito)} \end{aligned} \tag{17}$$

- **Trasformazione C → D**
  Siccome si tratta di un'adiabatica, abbiamo

$$Q^{C\to D} = 0 \tag{18}$$

- **Trasformazione D → A**
  Siccome si tratta di un'isocora, abbiamo

$$\begin{aligned} Q^{D\to A} &= nc_V(T_A - T_D) = \\ &= n\frac{3}{2}R(T_A - T_D) \end{aligned} \tag{19}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} Q^{D\to A} &= 2\,\cancel{\text{mol}}\frac{3}{2} \cdot 8.314\,\frac{\text{J}}{\cancel{\text{mol}}\ \cancel{\text{K}}}(273.2\,\cancel{\text{K}} - 433\,\cancel{\text{K}}) = \\ &= -3986\,\text{J} = \\ &= -3.99\,\text{kJ} \quad \text{(calore ceduto)} \end{aligned} \tag{20}$$

3. Dal calcolo dei calori possiamo ricavare anche il lavoro nel ciclo. Infatti, per il primo principio la somma dei calori e dei lavori è pari alla variazione di energia interna, che è nulla su un ciclo

$$\begin{aligned}
\Delta U_{ciclo} &= Q_{ciclo} - W_{ciclo} = 0 \\
&\Downarrow \\
W_{ciclo} &= Q_{ciclo} \\
&= Q^{A\to B} + Q^{B\to C} + Q^{C\to D} + Q^{D\to A} = \\
&= -4.16\,\mathrm{kJ} + 10.22\,\mathrm{kJ} + 0 - 3.99\,\mathrm{kJ} = \\
&= 2.07\,\mathrm{kJ} \qquad (21)
\end{aligned}$$

4. Sempre dal calcolo dei calori possiamo anche ricavare il rendimento del ciclo

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = \\
&= 1 - \frac{|-4.16|\,\mathrm{k}\cancel{\mathrm{J}} + |-3.99|\,\mathrm{k}\cancel{\mathrm{J}}}{10.22\,\mathrm{k}\cancel{\mathrm{J}}} = \\
&= 1 - 0.8 = \\
&= 0.2 \qquad (22)
\end{aligned}$$

5. Per calcolare quanto ghiaccio si è sciolto, consideriamo le trasformazioni a contatto con la miscela acqua+ghiaccio, ossia la $A \to B$ e la $D \to A$. In tali trasformazioni il gas cede un calore totale

$$\begin{aligned}
Q_{ced} &= Q^{A\to B} + Q^{D\to A} = \\
&= -4.16\,\mathrm{kJ} - 3.99\,\mathrm{kJ} = \\
&= -8.15\,\mathrm{kJ} \qquad (23)
\end{aligned}$$

Tale calore, viene assorbito dalla miscela acqua+ghiaccio e porta allo scioglimento di una massa m di ghiaccio data da

$$Q_{fus} = |Q_{ced}| = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{|Q_{ced}|}{\lambda} \qquad (24)$$

dove $\lambda = 3.3 \cdot 10^5\,\mathrm{J/Kg}$ è il calore latente di fusione del ghiaccio. Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
m &= \frac{8.15 \cdot 10^3\,\cancel{\mathrm{J}}}{3.3 \cdot 10^5\,\frac{\cancel{\mathrm{J}}}{\mathrm{Kg}}} = \\
&= 2.5 \cdot 10^{-2}\mathrm{Kg} \qquad (25)
\end{aligned}$$

6. Per calcolare la variazione di entropia dell'universo

$$\Delta S_{univ} = \underbrace{\Delta S_{gas}}_{=0} + \Delta S_{amb} \qquad (26)$$

dove la variazione di entropia del gas è nulla perché compie un ciclo (essendo l'entropia una funzione di stato). Per calcolare la variazione di entropia dell'ambiente, osserviamo che esso è costituito dalla miscela acqua+ghiaccio e dal termostato a temperatura T_C. In ciascuna trasformazione (a parte $C \to D$ che è adiabatica), l'ambiente assorbe (o cede) il calore che il gas cede (o assorbe), e dunque i calori relativi all'ambiente hanno il segno opposto a quelli relativi al gas

$$\begin{aligned}
\Delta S_{amb} &= \frac{-Q^{A\to B} - Q^{D\to A}}{T_A} + \frac{-Q^{B\to C}}{T_C} = \\
&= \frac{-Q_{ced}}{T_A} + \frac{-Q_{ass}}{T_C} = \\
&= \frac{8.15\,\mathrm{kJ}}{273.2\,\mathrm{K}} + \frac{-10.22\,\mathrm{kJ}}{519\,\mathrm{K}} = \\
&= 10.1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \qquad (27)
\end{aligned}$$