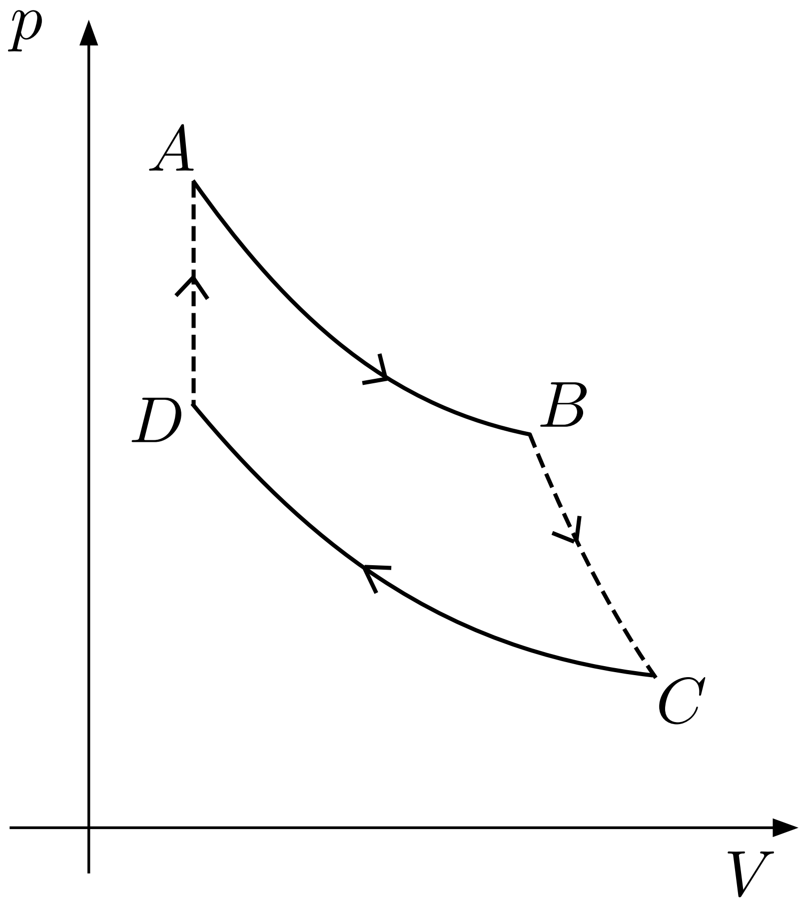
Esercizio (tratto dal Problema 12.30 del Mazzoldi-Nigro-voci)

Una macchina termica irreversibile lavora tra due sorgenti alle temperature $T_1 = 434.5\,\mathrm{K}$ e $T_2 = 290\,\mathrm{K}$. La sostanza lavorante è costituita da $n = 1.2$ moli di gas ideale biatomico, ed il ciclo ha le seguenti caratteristiche. Il gas viene prima fatto espandere reversibilmente a contatto con la sorgente a T_1 dal volume $V_A = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ al volume V_B. A questo punto si interrompe il contatto termico e si fa espandere il gas in maniera adiabatica irreversibile, fino al volume V_C e alla temperatura T_2. Si pone quindi il gas in contatto termico con la sorgente a T_2 e lo si comprime reversibilmente fino al volume V_A. Infine si rimette il gas a contatto termico con la sorgente T_1 mantenendo costante il volume. Il rendimento del ciclo è pari a $\eta = 0.216$ e la variazione di entropia dell'universo dopo che il sistema ha compiuto il ciclo è pari a $\Delta S_{\mathrm{univ}} = 2.67\,\mathrm{J/K}$. Calcolare:

1. i calori scambiati dal gas in un ciclo;

2. i volumi V_B e V_C.



SOLUZIONE

Dati noti:
$n = 1.2$
$T_1 = 434.5\,\mathrm{K}$
$T_2 = 290\,\mathrm{K}$
$V_A = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$
$\eta = 0.216$
$\Delta S_{\mathrm{univ}} = 2.67\,\mathrm{J/K}$

1. Il ciclo del gas è così composto:

   - $A \to B$**:** espansione isoterma reversibile
     (il gas assorbe calore dalla sorgente calda T_1 e compie lavoro)

   - $B \to C$**:** espansione adiabatica irreversibile
     (non c'è scambio di calore tra gas e ambiente)

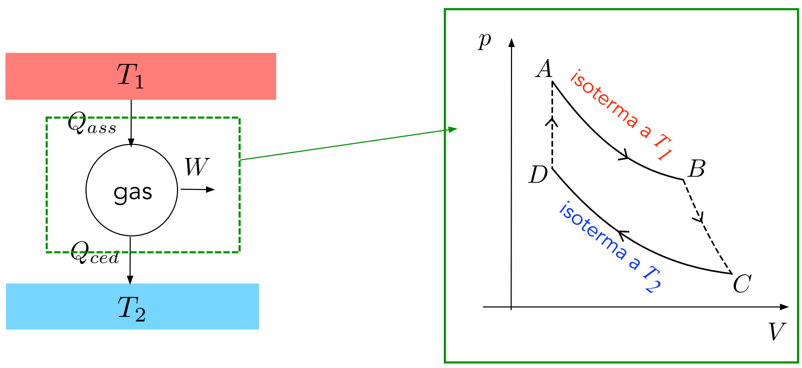
   - $C \to D$**:** compressione isoterma reversibile
     (il gas cede calore alla sorgente fredda T_2 e subisce lavoro)

   - $D \to A$**:** isocora irreversibile
     (il gas assorbe calore dalla sorgente calda T_1)

   Pertanto abbiamo

   $$\begin{aligned} Q_{ass} &= Q^{A\to B} + Q^{D\to A} \\ Q_{ced} &= Q^{C\to D} \end{aligned} \tag{1}$$

   dove Q_{ass} e Q_{ced} sono i calori scambiati *dal gas*.



2. Il rendimento del ciclo è dato da

   $$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \tag{2}$$

3. La variazione di entropia dell'universo (che coincide con la variazione di entropia dell'ambiente, visto che il gas compie un ciclo) è data dai calori che ciascuna sorgente

scambia col gas, diviso per la rispettiva temperatura:

$$\begin{aligned} \Delta S_{univ} &= \Delta S_{amb} + \underbrace{\Delta S_{gas}}_{=0} = \\ &= \Delta S_{sorg,1} + \Delta S_{sorg,2} = \\ &= \frac{Q_{sorg,1}}{T_1} + \frac{Q_{sorg,2}}{T_2} \end{aligned} \tag{3}$$

Siccome il calore assorbito (o ceduto) da ciascuna sorgente è il calore ceduto (o assorbito) dal gas con tale sorgente, i calori delle sorgenti hanno segni opposti rispetto a quelli del gas. Pertanto

$$\Delta S_{univ} = \frac{-Q_{ass}}{T_1} + \frac{-Q_{ced}}{T_2} \tag{4}$$

4. Dato che η e ΔS_{univ} sono dati noti, le equazioni (2) e (4) costituiscono un sistema di due equazioni per le due incognite Q_{ass} e Q_{ced}

$$\left\{ \begin{aligned} \eta &= 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \\ \Delta S_{univ} &= \frac{-Q_{ass}}{T_1} + \frac{-Q_{ced}}{T_2} \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Per risolvere il sistema, abbiamo dalla prima equazione

$$Q_{ced} = (\eta - 1) Q_{ass} \tag{6}$$

e, sostituendo nella seconda,

$$\begin{aligned} \Delta S_{univ} &= -\frac{Q_{ass}}{T_1} + \frac{(1-\eta) Q_{ass}}{T_2} = \\ &= Q_{ass} \left(\frac{1-\eta}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

da cui

$$Q_{ass} = \frac{\Delta S_{univ}}{\frac{1-\eta}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \tag{8}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} Q_{ass} &= \frac{2.67 \, \frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{K}}}}{\frac{1-0.216}{290 \, \cancel{\mathrm{K}}} - \frac{1}{434.5 \, \cancel{\mathrm{K}}}} = \\ &= 6643 \, \mathrm{J} \end{aligned} \tag{9}$$

Dalla (6) otteniamo ora

$$\begin{aligned} Q_{ced} &= (0.216 - 1) \, 6643 \, \mathrm{J} = \\ &= -5208 \, \mathrm{J} \end{aligned} \tag{10}$$

5. Calcoliamo ora i calori scambiati nel ciclo. Dalla (1) osserviamo che

   - il calore ceduto è quello della trasformazione $C \to D$. Pertanto

$$Q^{C \to D} = Q_{ced} = -5208 \, \mathrm{J} \tag{11}$$

- Il calore $Q^{D\to A}$, essendo $D \to A$ un'isocora, è dato da

$$
\begin{aligned}
Q^{D\to A} &= nc_V(T_1 - T_2) = \qquad [c_V = \tfrac{5}{2}R \text{ per bas biatomico}] \\
&= n\frac{5}{2}R(T_1 - T_2) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

e sostituendo i valori

$$
\begin{aligned}
Q^{D\to A} &= 1.2\,\mathrm{m\cancel{o}l}\,\frac{7}{2}\,8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l}\,\cancel{\mathrm{K}}}(434.5\,\cancel{\mathrm{K}} - 290\,\cancel{\mathrm{K}}) = \\
&= 3604\,\mathrm{J} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

- Il calore totale assorbito è dato da $Q_{ass} = Q^{A\to B} + Q^{D\to A}$. Possiamo dunque ricavare

$$
\begin{aligned}
Q^{A\to B} &= Q_{ass} - Q^{D\to A} = \\
&= 6643\,\mathrm{J} - 3604\,\mathrm{J} = \\
&= 3039\,\mathrm{J} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

- Infine, essendo $B \to C$ un'adiabatica, abbiamo

$$
Q^{B\to C} = 0 \qquad (15)
$$

6. Procediamo ora al calcolo dei volumi V_B eV_C.

   - La trasformazione $A \to B$ è un'isoterma reversibile. Pertanto abbiamo
     - Per il primo principio

$$
\underbrace{\Delta U^{A\to B}}_{=0} = Q^{A\to B} - W^{A\to B} \qquad \Rightarrow \qquad W^{A\to B} = Q^{A\to B} \qquad (16)
$$

     - D'altra parte l'espressione del lavoro per un'isoterma è

$$
W^{A\to B} = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} \qquad (17)
$$

     - Combinando la (16) e la (17) otteniamo

$$
\begin{aligned}
nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} &= Q^{A\to B} \\
&\Downarrow \\
\ln\frac{V_B}{V_A} &= \frac{Q^{A\to B}}{nRT_1} \\
&\Downarrow \\
\frac{V_B}{V_A} &= e^{\frac{Q^{A\to B}}{nRT_1}} \\
&\Downarrow \\
V_B &= V_A\, e^{\frac{Q^{A\to B}}{nRT_1}} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Sostituendo i valori

$$
\begin{aligned}
V_B &= 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3\, e^{\frac{3039\,\mathrm{J}}{1.2\,\mathrm{m\cancel{o}l}\,8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l}\,\cancel{\mathrm{K}}}\cdot 434.5\,\cancel{\mathrm{K}}}} = \\
&= 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot 2.016 = \\
&= 10.08\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

- Analogamente, la trasformazione $C \to D$ è pure un'isoterma reversibile. Pertanto abbiamo
  - Per il primo principio
$$\underbrace{\Delta U^{C\to D}}_{=0} = Q^{C\to D} - W^{C\to D} \qquad \Rightarrow \qquad W^{C\to D} = Q^{C\to D} \quad (20)$$
  - D'altra parte l'espressione del lavoro per un'isoterma è
$$W^{C\to D} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} \quad (21)$$
  - Combinando la (20) e la (21) otteniamo
$$\begin{aligned} nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} &= Q^{C\to D} \\ &\Downarrow \qquad [\text{uso } V_D = V_A \text{ perché } D \to A \text{ è isocora}] \\ \ln \frac{V_A}{V_C} &= \frac{Q^{C\to D}}{nRT_2} \\ &\Downarrow \\ \frac{V_A}{V_C} &= e^{\frac{Q^{C\to D}}{nRT_2}} \\ &\Downarrow \\ V_C &= V_A\, e^{-\frac{Q^{C\to D}}{nRT_2}} \quad (22) \end{aligned}$$

    Sostituendo i valori otteniamo
$$\begin{aligned} V_C &= 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3\, e^{-\frac{-5208\,\mathrm{J}}{1.2\,\cancel{\mathrm{mol}}\, 8.314\, \frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{mol}}\,\cancel{\mathrm{K}}} \cdot 290\,\cancel{\mathrm{K}}}} = \\ &= 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot 6.050 = \\ &= 30.25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \quad (23) \end{aligned}$$