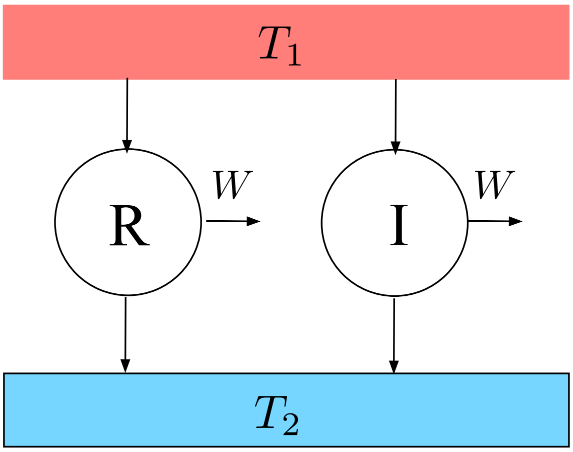
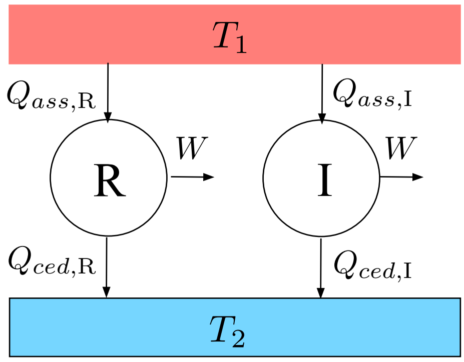
Esercizio (tratto dal Problema 12.51 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Due macchine termiche utilizzano le stesse due sorgenti: una sorgente fredda alla temperatura $T_2 = 300\,\mathrm{K}$ ed una sorgente calda alla temperatura $T_1 = 600\,\mathrm{K}$. La prima macchina, reversibile, assorbe un calore $2\,\mathrm{kJ}$ e produce un lavoro W. La seconda macchina, irreversibile, con rendimento $\eta_{\mathrm{I}} = 0.3$, produce lo stesso lavoro W. Calcolare la variazione di entropia dell'universo in un ciclo di ciascuna delle due macchine.



SOLUZIONE

Dati Noti:
$Q_{ass,\mathrm{R}} = 2\,\mathrm{kJ}$
$T_1 = 600\,\mathrm{K}$
$T_2 = 300\,\mathrm{K}$
$\eta_{\mathrm{I}} = 0.3$



1. Consideriamo anzitutto la prima macchina termica reversibile R.
   - Essendo la macchina termica reversibile, la variazione di entropia dell'universo durante la trasformazione ciclica reversibile del gas in R è nulla
   $$\Delta S_{univ,\mathrm{R}} = 0 \tag{1}$$
   - Dato che è reversibile e che opera tra due sorgenti, il suo rendimento η_{R} è pari al rendimento η_C della macchina di Carnot ed è determinato unicamente dalle temperature delle due sorgenti
   $$\eta_{\mathrm{R}} = \eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{2}$$
   - E del resto dalla definizione generale di rendimento abbiamo anche
   $$\eta_{\mathrm{R}} = \frac{W}{Q_{ass,\mathrm{R}}} \qquad \Rightarrow \qquad W = \eta_{\mathrm{R}}\, Q_{ass,\mathrm{R}} \tag{3}$$
   e, usando l'Eq.(2), si ha
   $$W = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_{ass,\mathrm{R}} \tag{4}$$
   che, essendo ora espresso in termini dei dati noti, ci è ora noto (e servirà per la seconda macchina).
   - Infine, essendo in generale il rendimento esprimibile anche come
   $$\eta_{\mathrm{R}} = 1 - \frac{|Q_{ced,\mathrm{R}}|}{Q_{ass,\mathrm{R}}} \quad , \tag{5}$$
   Confrontando le Eq.(2) e (5) abbiamo
   $$\frac{T_2}{T_1} = \frac{|Q_{ced,\mathrm{R}}|}{Q_{ass,\mathrm{R}}} \tag{6}$$

da cui ricaviamo subito

$$|Q_{ced,\mathrm{R}}| = Q_{ass,\mathrm{R}} \frac{T_2}{T_1} \tag{7}$$

ed è anch'esso espresso in termini dei dati noti, per cui ci è noto.

Osservazione
Avendo ora calcolato i calori scambiati dalla macchina R, possiamo anche verificare direttamente che la (1) è vera, calcolando la variazione di entropia dell'universo attraverso la variazione di entropia dell'ambiente. Infatti

$$\begin{aligned}
\Delta S_{univ,\mathrm{R}} &= \Delta S_{amb,\mathrm{R}} + \underbrace{\Delta S_{gas,\mathrm{R}}}_{=0 \text{ perché gas in R compie ciclo}} = \\
&= \frac{Q_{sorg1,\mathrm{R}}}{T_1} + \frac{Q_{sorg2,\mathrm{R}}}{T_2} = \\
&\quad \text{[i calori scambiati dalle sorgenti col gas in R sono} \\
&\quad \text{uguali ed opposti a quelli scambiati dal gas in R]} \\
&= \frac{-Q_{ass,\mathrm{R}}}{T_1} + \frac{-Q_{ced,\mathrm{R}}}{T_2} = \\
&= \frac{-Q_{ass,\mathrm{R}}}{T_1} + \frac{|Q_{ced,\mathrm{R}}|}{T_2} \\
&\quad \text{[uso la (7)]} \\
&= \frac{-Q_{ass,\mathrm{R}}}{T_1} + \frac{1}{T_2} Q_{ass,\mathrm{R}} \frac{T_2}{T_1} = \\
&= \frac{-Q_{ass,\mathrm{R}}}{T_1} + \frac{Q_{ass,\mathrm{R}}}{T_1} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

2. Consideriamo ora la seconda macchina termica irreversibile I.

   - Per la definizione generale di rendimento si ha

     $$\eta_{\mathrm{I}} = \frac{W}{Q_{ass,\mathrm{I}}} \qquad \Rightarrow \qquad Q_{ass,\mathrm{I}} = \frac{W}{\eta_{\mathrm{I}}} \tag{9}$$

     dove W è identico al lavoro compiuto dalla prima macchina. Pertanto, sostituendo (4) nell'Eq.(9) si ottiene

     $$Q_{ass,\mathrm{I}} = \frac{1}{\eta_{\mathrm{I}}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_{ass,\mathrm{R}} \tag{10}$$

     Sostituendo i valori

     $$\begin{aligned}
     Q_{ass,\mathrm{I}} &= \frac{1}{0.3} \left(1 - \frac{300\,\cancel{\mathrm{K}}}{600\,\cancel{\mathrm{K}}}\right) 2\,\mathrm{kJ} = \\
     &= 3.33\,\mathrm{kJ}
     \end{aligned} \tag{11}$$

   - D'altra parte, il rendimento della seconda macchina termica è esprimibile anche come

     $$\begin{aligned}
     \eta_{\mathrm{I}} &= 1 - \frac{|Q_{ced,\mathrm{I}}|}{Q_{ass,\mathrm{I}}} \\
     &\Downarrow \\
     Q_{ass,\mathrm{I}}(\eta_{\mathrm{I}} - 1) &= -|Q_{ced,\mathrm{I}}| \\
     &\Downarrow \\
     |Q_{ced,\mathrm{I}}| &= Q_{ass,\mathrm{I}}(1 - \eta_{\mathrm{I}})
     \end{aligned} \tag{12}$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} |Q_{ced,\mathrm{I}}| &= 3.33\,\mathrm{kJ}\,(1-0.3) = \\ &= 2.33\,\mathrm{kJ} \end{aligned} \tag{13}$$

Essendo il calore ceduto negativo, si ha

$$Q_{ced,\mathrm{I}} = -|Q_{ced,\mathrm{I}}| = -2.33\,\mathrm{kJ} \tag{14}$$

- La variazione di entropia dell'universo durante la trasformazione ciclica irreversibile del gas in I è data da

$$\begin{aligned} \Delta S_{univ,\mathrm{I}} &= \Delta S_{amb,\mathrm{I}} + \underbrace{\Delta S_{gas,\mathrm{I}}}_{=0 \text{ perché gas in I compie ciclo}} = \\ &= \frac{Q_{sorg1,\mathrm{I}}}{T_1} + \frac{Q_{sorg2,\mathrm{I}}}{T_2} = \end{aligned}$$

Osservo che i calori scambiati dalle sorgenti col gas sono uguali ed opposti a quelli scambiati dal gas con le sorgenti. Ad esempio il gas assorbe dalla sorgente 1 il calore $Q_{ass,\mathrm{I}}$ e dunque la sorgente 1 *cede* al gas il calore $-Q_{ass,\mathrm{I}}$. E analogamente per la sorgente 2. Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta S_{univ,\mathrm{I}} &= \frac{-Q_{ass,\mathrm{I}}}{T_1} + \frac{-Q_{ced,\mathrm{I}}}{T_2} = \\ &= \frac{-Q_{ass,\mathrm{I}}}{T_1} + \frac{|Q_{ced,\mathrm{I}}|}{T_2} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} \Delta S_{univ,\mathrm{I}} &= \frac{-3.33\,\mathrm{kJ}}{600\,\mathrm{K}} + \frac{2.33\,\mathrm{kJ}}{300\,\mathrm{K}} = \\ &= 2.22\,\mathrm{J/K} \end{aligned} \tag{15}$$

che è positiva, come mi aspetto, visto che la trasformazione in I è irreversibile.