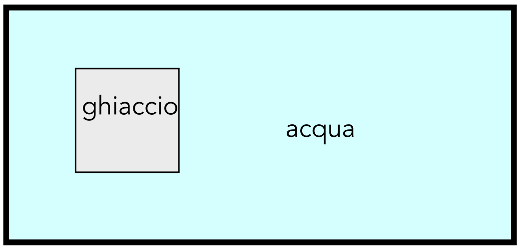
Esercizio **(tratto dall'esempio 10.3 del Mazzoldi-Nigro-Voci)**

Un pezzetto di ghiaccio, di massa $m_{\rm gh} = 30\,{\rm gr}$ e alla temperatura $T_1 = -15\,^o{\rm C}$, viene immerso in un recipiente adiabatico contenente $m_{\rm a} = 50\,{\rm gr}$ d'acqua calda alla temperatura di $60\,^o\,{\rm C}$. Sapendo che il ghiaccio ha un calore specifico di $c_{\rm gh} = 2051.5\,{\rm J/(kg\,K)}$ ed un calore latente di fusione di $\lambda_{\rm gh,f} = 3.3 \cdot 10^5 {\rm J/K}$, determinare:

1. se il ghiaccio si scioglie completamente;
2. qual è la temperatura finale di equilibrio



SOLUZIONE
Dati noti:
Riscriviamo i dati noti in unità del Sistema Internazionale:

$T_1 = (273.15 - 15)\,\mathrm{K} = 258.15\,\mathrm{K};$
$m_{\mathrm{gh}} = 0.03\,\mathrm{kg};$
$c_{\mathrm{gh}} = 2051.5\,\mathrm{J/(kg\,K)}$
$\lambda_{\mathrm{gh,f}} = 3.3 \cdot 10^5\,\mathrm{J/kg}$
$T_2 = (273.15 + 60)\,\mathrm{K} = 333.15\,\mathrm{K};$
$m_{\mathrm{a}} = 0.05\,\mathrm{kg};$
$c_{\mathrm{a}} = 1\,\mathrm{cal/K} = 4186\,\mathrm{J/(kg\,K)}$

1. Stabiliamo innanzitutto se il ghiaccio si scioglie tutto o no.
   - Per sciogliersi completamente, il ghiaccio deve:
     (a) innalzare la sua temperatura da quella iniziale $T_1 = -15\,^o\mathrm{C}$ $(\leftrightarrow 258.15\,\mathrm{K})$ a
     $$T_0 = 0\,^o\mathrm{C}\ (\leftrightarrow 273.15\ \mathrm{K}) \tag{1}$$
     (b) assorbire un calore pari a $Q_{fus} = m_{\mathrm{gh}}\lambda_{\mathrm{gh.f}}$, in modo che l'*intera* sua massa m_{gh} si converta dallo stato solido allo stato liquido (durante tale processo di fusione la temperatura del ghiaccio non cambia).

     Indichiamo pertanto con $Q_{\mathrm{gh,1}}$ tale calore necessario alla fusione dell'intero pezzo di ghiaccio
     $$Q_{\mathrm{gh,1}} = m_{\mathrm{gh}}c_{\mathrm{gh}}(T_0 - T_1) + m_{\mathrm{gh}}\lambda_{\mathrm{gh.f}} > 0 \tag{2}$$
   - Dato che il contenitore è adiabatico, tale calore deve essere interamente fornito dall'acqua. Affiché l'acqua ceda calore al ghiaccio, occorre che la temperatura dell'acqua sia superiore o uguale alla temperatura T_0. Il massimo calore che la massa d'acqua può cedere a tale scopo è quello che corrisponde alla diminuzione di temperatura da T_2 a T_0, e vale
     $$Q_{\mathrm{a,1}} = m_{\mathrm{a}}c_{\mathrm{a}}(T_0 - T_2) < 0 \tag{3}$$
   - Pertanto il ghiaccio si scioglie completamente se l'acqua può cedere un calore sufficiente alla sua completa fusione, ossia se vale
     $$Q_{\mathrm{gh,1}} \leq |Q_{\mathrm{a,1}}| \tag{4}$$
   - Valutiamo dunque questi due contributi
     $$\begin{aligned} Q_{\mathrm{gh,1}} &= m_{\mathrm{gh}}c_{\mathrm{gh}}(T_0 - T_1) + m_{\mathrm{gh}}\lambda_{\mathrm{gh.f}} = \\ &= 0.03\,\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 2051.5\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{kg}}\,\cancel{\mathrm{K}}}(0-(-15))\,\cancel{\mathrm{K}} + 0.03\,\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 3.3 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{kg}}} \\ &= 923.2\,\mathrm{J} + 9900\,\mathrm{J} = \\ &= 10823.2\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{a},1} &= m_{\mathrm{a}} c_{\mathrm{a}} (T_0 - T_2) = \\ &= 0.05\,\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 4186 \,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{kg}}\,\cancel{\mathrm{K}}} (0 - (60))\,\cancel{\mathrm{K}} \\ &= -12558\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{6}$$

Confrontando (5) e (6) si osserva che la disuguaglianza (4) per lo scioglimento completo del ghiaccio è effettivamente soddisfatta. Pertanto il ghiaccio si scioglierà completamente.

2. Calcoliamo ora la temperatura finale di equilibrio

   - Nello scendere da T_2 a T_0 l'acqua cederebbe più calore di quanto non sia necessario per sciogliere interamente il ghiaccio. Ciò significa che in realtà l'acqua avrà ceduto la quantità di calore $-Q_{\mathrm{gh},1}$ necessaria alla fusione del ghiaccio già *prima* di aver raggiunto la temperatura T_0. In altri termini, quando il ghiaccio si sarà completamente sciolto l'acqua si troverà ancora ad una temperatura T^* *superiore* a T_0, il cui valore è determinato da

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{gh},1} &= -m_{\mathrm{a}} c_{\mathrm{a}} (T^* - T_2) \\ &\Downarrow \\ T^* &= T_2 - \frac{Q_{\mathrm{gh},1}}{m_{\mathrm{a}} c_{\mathrm{a}}} \end{aligned} \tag{7}$$

   e, sostituendo i valori

$$\begin{aligned} T^* &= 333.15\,\mathrm{K} - \frac{10823.2\,\cancel{\mathrm{J}}}{0.05\,\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 4186\,\frac{\cancel{\mathrm{J}}}{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{K}}} = \\ &= 333.15\,\mathrm{K} - 51.71\,\mathrm{K} = \\ &= 281.44\,\mathrm{K} \qquad (\leftrightarrow 8.29\,^o\,\mathrm{C}) \end{aligned} \tag{8}$$

   - In quel momento ci sono nel recipiente due masse d'acqua:
   i) la massa m_{gh} del ghiaccio passato alla fase liquida alla temperatura T_0;
   ii) la massa m_a dell'acqua alla temperatura $T^* > T_0$.
   Quindi l'equazione che determina la temperatura finale di equilibrio è

$$m_{gh} c_{\mathrm{a}} (T_f - T_0) + m_{\mathrm{a}} c_{\mathrm{a}} (T_f - T^*) = 0$$

   dove abbiamo usato c_{a} come calore specifico dell'acqua per *entrambi*, dato che si trovano entrambi allo stato liquido. Ricaviamo allora che la temperatura finale vale

$$T_f = \frac{m_{gh} T_0 + m_a T^*}{m_{gh} + m_a} \tag{9}$$

   Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{0.03\,\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 273.15\,\mathrm{K} + 0.05\,\cancel{\mathrm{kg}} \cdot 281.44\,\mathrm{K}}{(0.03 + 0.05)\,\cancel{\mathrm{kg}}} = \\ &= 278.3\,\mathrm{K} \qquad (\leftrightarrow 5.2\,^o\,\mathrm{C}) \end{aligned} \tag{10}$$