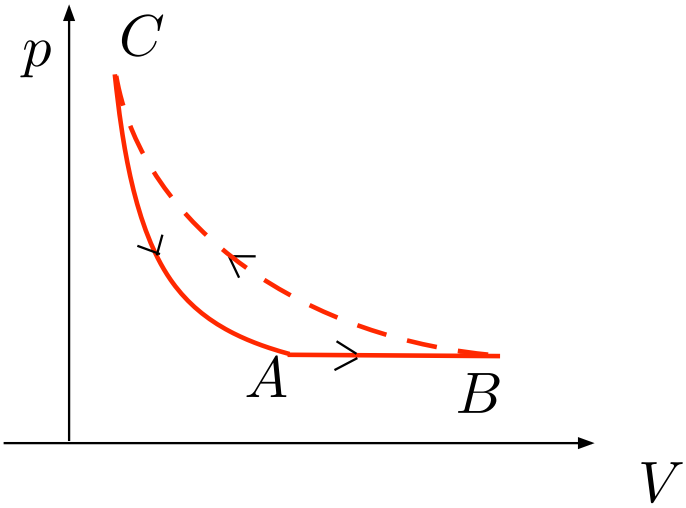
Esercizio (tratto dal Problema 13.34 del Mazzoldi 2)

Un gas ideale monoatomico passa dallo stato A ($V_A = 3.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$, $p_A = 0.6\,\mathrm{bar}$, $T_A = 286\,\mathrm{K}$) allo stato B ($V_B = 6.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$) con un'espansione isobara reversibile. Il gas viene poi posto a contatto termico con una sorgente alla temperatura T_C e si comprime fino al volume $V_C = 3.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$, assorbendo dall'ambiente un lavoro $|W^{B\to C}| = 6\,\mathrm{kJ}$. Dallo stato C il gas torna infine nello stato A con un'espansione adiabatica reversibile. Calcolare il calore ed il lavoro in ciascuna trasformazione del ciclo, e determinare l'efficienza frigorifera $\xi = Q_{ass}/|W|$ del ciclo.



SOLUZIONE
Dati noti:
Scriviamo i dati noti convertendo in unità del Sistema Internazionale

$$\boxed{\begin{array}{lcl} p_A & = & 0.6\,\mathrm{bar} = 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ T_A & = & 286\,\mathrm{K} \\ V_A & = & 3.8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \\ V_B & = & 6.0\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \\ V_C & = & 3.1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \\ W^{B\to C} & = & -6\,\cdot 10^3\mathrm{J} \quad \text{(lavoro subìto dal gas)} \end{array}} \tag{1}$$

1. Calcoliamo anzitutto il numero di moli del gas. Sfruttando l'equazione di stato nella stato A abbiamo:
$$p_A V_A = nRT_A$$
e dunque
$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A} \tag{2}$$
Sostituendo i dati otteniamo
$$\begin{aligned} n &= \frac{0.6\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\,\cdot 3.8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\,286\,\mathrm{K}} = \\ &= \frac{0.6\cdot 10^5\;\cdot 3.8\cdot 10^{-2}}{8.314\,\cdot\,286\,\mathrm{K}}\,\frac{\mathrm{Pa\,m}^3}{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\,\cancel{\mathrm{K}}}\,\cancel{\mathrm{K}}} = \\ &\quad [\text{uso } \mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \mathrm{Pa\,m}^3] \\ &= 0.959\,\mathrm{mol} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato B. Dato che la trasformazione A→B è isobara, abbiamo:
$$p_B = p_A \tag{4}$$
e dunque
$$p_B = 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$
Per quanto riguarda la temperatura, usiamo nuovamente l'equazione di stato
$$p_B V_B = nRT_B$$
e dunque
$$\begin{aligned} T_B &= \frac{p_B V_B}{nR} = \\ &\qquad [\text{uso (2)}] \\ &= \frac{p_B V_B}{\frac{p_A V_A}{RT_A} R} \\ &\qquad [\text{uso (4)}] \\ &= T_A \frac{V_B}{V_A} \end{aligned} \tag{5}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} T_B &= T_A \frac{V_B}{V_A} = \\ &= 286\,\mathrm{K}\, \frac{6.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{3.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3} = \\ &= 452\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{6}$$

3. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato C. Siccome la trasformazione C→A è un'adiabatica, abbiamo che

$$p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma$$

dove

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} \qquad \text{(gas monoatomico)} \tag{7}$$

Pertanto

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{5/3} \tag{8}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} p_C &= 0.6 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \left(\frac{3.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{3.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}\right)^{5/3} = \\ &= 0.84 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{9}$$

Per la temperatura usiamo nuovamente l'equazione della curva adiabatica, questa volta nella forma

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

da cui

$$\begin{aligned} T_C &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \\ &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/3} \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} T_C &= 286\,\mathrm{K} \left(\frac{3.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{3.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}\right)^{2/3} = \\ &= 328\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{11}$$

4. Nel tratto C→A il calore

$$Q^{C\to A} = 0 \tag{12}$$

in quanto C→A è un'adiabatica.

5. Calcoliamo ora il calore $Q^{A\to B}$. Siccome si tratta di una trasformazione isobara, possiamo utilizzare la formula

$$
\begin{aligned}
Q^{A\to B} &= nc_p(T_B - T_A) = \\
&= n\frac{5}{2}R\,(T_B - T_A) = \\
&\quad \text{[uso (5) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali]} \\
&= n\frac{5}{2}R\left(T_A\frac{V_B}{V_A} - T_A\right) = \\
&= \text{[uso (2) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali]} = \\
&= \frac{p_A V_A}{RT_A}\frac{5}{2}R\,T_A\left(\frac{V_B}{V_A} - 1\right) = \\
&= \frac{5}{2}\,p_A V_A\left(\frac{V_B}{V_A} - 1\right) = \\
&= \frac{5}{2}\,p_A(V_B - V_A) = \\
&= 2.5\,\cdot 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\,(6.0 - 3.8)\,10^{-2}\,\mathrm{m}^3 = \\
&= 3300\,\mathrm{J} \qquad \text{(calore assorbito dal gas)} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

6. Calcoliamo ora il calore $Q^{B\to C}$. Utilizziamo il primo principio della termodinamica ($\Delta U = Q - W$) ed otteniamo

$$
\begin{aligned}
Q^{B\to C} &= \Delta U^{B\to C} + W^{B\to C} = \\
&= nc_V\,(T_C - T_B) + W^{B\to C} = \\
&= n\frac{3}{2}R\,(T_C - T_B) + W^{B\to C} = \\
&\quad \text{[uso (2), (5) e (10) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali]} \\
&= \frac{p_A V_A}{RT_A}\,\frac{3}{2}R\left(T_A\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/3} - T_A\frac{V_B}{V_A}\right) + W^{B\to C} = \\
&= \frac{3}{2}\,p_A V_A\left(\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/3} - \frac{V_B}{V_A}\right) + W^{B\to C} = \\
&= 1.5\,\cdot 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 3.8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3\left(\left(\frac{3.8}{3.1}\right)^{2/3} - \frac{6.0}{3.8}\right) - 6000\mathrm{J} = \\
&= -7483\,\mathrm{J} \qquad \text{(calore ceduto dal gas)} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

7. Calcoliamo ora il lavoro $W^{A\to B}$:

$$
\begin{aligned}
W^{A\to B} &= \int_{V_A}^{V_B} p dV = \\
&= p_A\,(V_B - V_A) = \\
&= 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\;(6.0 - 3.8)\;\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 = \\
&= 1.32\,\cdot 10^3\,\mathrm{Pa}\;\mathrm{m}^3 = \\
&= 1320\;\mathrm{J} \qquad \text{(lavoro eseguito dal gas)} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

8. Calcoliamo ora il lavoro $W^{C\to A}$ lungo l'adiabatica. Per il primo principio applicato

al caso di un'adiabatica si ha

$$\begin{aligned}
W^{C\to A} &= -\Delta U^{C\to A} = U(C) - U(A) = \\
&= n c_V (T_C - T_A) = \\
&= n\frac{3}{2}R(T_C - T_A) = \\
&\quad \text{[uso (2) e (10) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali]} \\
&= \frac{p_A V_A}{R T_A}\,\frac{3}{2}R\left(T_A\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/3} - T_A\right) \\
&= \frac{3}{2}p_A V_A\left(\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/3} - 1\right) \\
&= 1.5\,\cdot 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 3.8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3\left(\left(\frac{3.8}{3.1}\right)^{2/3} - 1\right) = \\
&= 497\,\mathrm{J} \qquad (16)
\end{aligned}$$

9. L'efficienza frigorifera del ciclo è definito come

$$\xi = \frac{Q_{ass}}{|Q_{ass} + Q_{ced}|} \qquad (17)$$

Per quanto calcolato in precedenza

$$\begin{aligned}
Q_{ced} &= Q^{B\to C} = -7483\,\mathrm{J} \\
Q_{ass} &= Q^{A\to B} = 3300\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{3300\,\mathrm{J}}{|3300\,\mathrm{J} - 7483\,\mathrm{J}|} = \\
&= 0.79 \qquad (18)
\end{aligned}$$

Controlliamo che l'efficienza del ciclo si poteva valutare anche come

$$\xi = \frac{Q_{ass}}{|W|} \qquad (19)$$

Per quanto calcolato in precedenza, abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
W &= W^{A\to B} + W^{B\to C} + W^{C\to A} = \\
&= 1320\,\mathrm{J} - 6000\,\mathrm{J} + 497\ \mathrm{J} = \\
&= -4183\,\mathrm{J} \qquad (20)
\end{aligned}$$

mentre

$$Q_{ass} = Q^{A\to B} = 3300\,\mathrm{J} \qquad (21)$$

e dunque

$$\xi = \frac{Q_{ass}}{|W|} = \frac{3300\,\mathrm{J}}{4183\,\mathrm{J}} = 0.79 \qquad (22)$$

che coincide con (18).