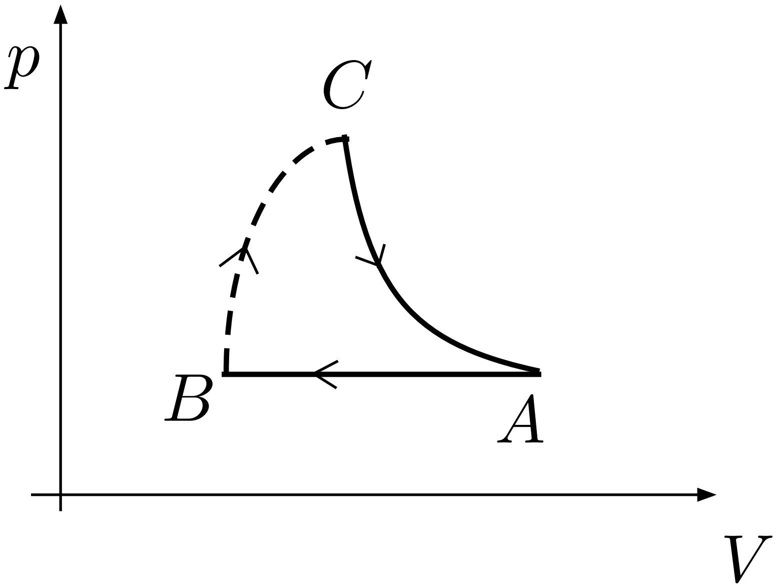
Esercizio (tratto dal Problema 13.34 del Mazzoldi 2)

Un gas ideale biatomico passa dallo stato A ($V_A = 5.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$, $p_A = 0.6\,\mathrm{bar}$, $T_A = 476\,\mathrm{K}$) allo stato B ($V_B = 3.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$) con una compressione isobara quasi-statica. Il gas viene poi posto a contatto termico con una sorgente alla temperatura T_C e si espande fino al volume $V_C = 3.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$, compiendo il lavoro $W^{B\to C} = 2\,\mathrm{kJ}$. Dallo stato C il gas torna infine nello stato A con un'espansione adiabatica quasi-statica. Calcolare il rendimento del ciclo e il lavoro nei tratti A→B e C→A.



SOLUZIONE

1. **Dati iniziali:**
Scriviamo i dati iniziali convertendo in unità del Sistema Internazionale

$$\boxed{\begin{array}{lcl} p_A & = & 0.6\,\mathrm{bar} = 0.6\ \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ T_A & = & 476\,\mathrm{K} \\ V_A & = & 5.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \\ V_B & = & 3.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \\ V_C & = & 3.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \\ W^{B\to C} & = & 2\ \cdot 10^3\,\mathrm{J} \end{array}} \tag{1}$$

Calcoliamo anzitutto il numero di moli del gas. Sfruttando l'equazione di stato nella stato A abbiamo:

$$p_A V_A = nRT_A$$

e dunque

$$n \;=\; \frac{p_A V_A}{RT_A} \tag{2}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} n &= \frac{0.6\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\ \cdot 5.1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\,476\,\mathrm{K}} = \\ &= \frac{0.6\cdot 10^5\ \ \cdot 5.1\cdot 10^{-2}}{8.314\ 476\,\mathrm{K}}\,\frac{\mathrm{Pa\,m}^3}{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\,\cancel{\mathrm{K}}}\,\cancel{\mathrm{K}}} = \\ &\quad [\text{uso } \mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \mathrm{Pa\,m}^3] \\ &= 0.773\,\mathrm{mol} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato B. Dato che la trasformazione A→B è isobara, abbiamo:

$$p_B = p_A \tag{4}$$

e dunque

$$p_B = 0.6\ \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

Per quanto riguarda la temperatura, usiamo nuovamente l'equazione di stato

$$p_B V_B = nRT_B$$

e dunque

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{p_B V_B}{nR} = \\ &\qquad\qquad [\text{uso } (2)] \\ &= \frac{p_B V_B}{\frac{p_A V_A}{RT_A} R} \\ &\qquad\qquad [\text{uso } (4)] \\ &= T_A\,\frac{V_B}{V_A} \end{aligned} \tag{5}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} T_B &= T_A \frac{V_B}{V_A} = \\ &= 476\,\mathrm{K}\,\frac{3.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{5.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3} = \\ &= 280\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{6}$$

3. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato C. Siccome la trasformazione C$\rightarrow$A è un'adiabatica, abbiamo che

$$p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma$$

dove

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} \qquad \text{(gas biatomico)} \tag{7}$$

Pertanto

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{7/5} \tag{8}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} p_C &= 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\left(\frac{5.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{3.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}\right)^{7/5} = \\ &= 1.06\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{9}$$

Per la temperatura usiamo nuovamente l'equazione della curva adiabatica, questa volta nella forma

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

da cui

$$\begin{aligned} T_C &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \\ &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/5} \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} T_C &= 476\,\mathrm{K}\left(\frac{5.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{3.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}\right)^{2/5} = \\ &= 560\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{11}$$

4. Nel tratto C$\rightarrow$A il calore

$$Q^{C\rightarrow A} = 0 \tag{12}$$

in quanto C$\rightarrow$A è un'adiabatica.

5. Calcoliamo ora il calore $Q^{A\rightarrow B}$. Siccome si tratta di una trasformazione isobara, possiamo utilizzare la formula

$$\begin{aligned} Q^{A\rightarrow B} &= n c_p (T_B - T_A) = \\ &= n\frac{7}{2}R\,(T_B - T_A) = \\ &= 0.773\,\cancel{\mathrm{mol}}\;\frac{7}{2}\,8.314\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{mol}}\,\cancel{\mathrm{K}}}(280 - 476)\,\cancel{\mathrm{K}} = \\ &= -4409\,\mathrm{J} \quad \text{(calore ceduto dal gas)} \end{aligned} \tag{13}$$

6. Calcoliamo ora il calore $Q^{B\to C}$. Utilizziamo il primo principio della termodinamica ($\Delta U = Q - W$) ed otteniamo

$$\begin{aligned}
Q^{B\to C} &= \Delta U^{B\to C} + W^{B\to C} = \\
&= nc_V\,(T_C - T_B) + W^{B\to C} = \\
&= n\frac{5}{2}R\,(T_C - T_B) + W^{B\to C} = \\
&= 0.773\,\cancel{\mathrm{m}}\mathrm{ol}\ \frac{5}{2}\,8.314\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{m}}\mathrm{ol}\ \cancel{\mathrm{K}}}(560-280)\,\cancel{\mathrm{K}} + 2000\mathrm{J} = \\
&= 6499\,\mathrm{J} \quad \text{(calore assorbito dal gas)} \qquad (14)
\end{aligned}$$

7. Il rendimento del ciclo è definito come

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \qquad (15)$$

Per quanto calcolato in precedenza

$$\begin{aligned}
Q_{ced} &= Q^{A\to B} = -4409\,\mathrm{J} \\
Q_{ass} &= Q^{B\to C} = 6499\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

e dunque

$$\eta = 1 - \frac{4409\,\mathrm{J}}{6499\,\mathrm{J}} = 0.32 \qquad (16)$$

8. Calcoliamo ora il lavoro $W^{A\to B}$:

$$\begin{aligned}
W^{A\to B} &= \int_{V_A}^{V_B} p dV = \\
&= p_A\,(V_B - V_A) = \\
&= 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\ (3.0-5.1)\,\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 = \\
&= -1.26\,\cdot 10^3\,\mathrm{Pa\ m}^3 = \\
&= -1260\ \mathrm{J} \qquad \text{(lavoro subìto dal gas)} \qquad (17)
\end{aligned}$$

9. Calcoliamo ora il lavoro $W^{C\to A}$. Per il primo principio applicato al caso di un'adiabatica si ha

$$\begin{aligned}
W^{C\to A} &= -\Delta U^{C\to A} = U(C) - U(A) = \\
&= nc_V(T_C - T_A) = \\
&= n\frac{5}{2}R(T_C - T_A) = \\
&\quad \text{[uso (2) e (10) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali]} \\
&= \frac{p_A V_A}{R T_A}\,\frac{5}{2}R\left(T_A\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/5} - T_A\right) \\
&= \frac{5}{2}p_A V_A\left(\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{2/5} - 1\right) \\
&= 2.5\,\cdot 0.6\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 5.1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3\left(\left(\frac{5.1}{3.4}\right)^{2/5} - 1\right) = \\
&= 1347\,\mathrm{J} \qquad (18)
\end{aligned}$$

Controlliamo che il rendimento del ciclo si possa valutare anche come

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} \tag{19}$$

Per quanto calcolato in precedenza, otteniamo

$$\begin{aligned} W &= W^{A\to B} + W^{B\to C} + W^{C\to A} = \\ &= -1260\,\mathrm{J} + 2000\,\mathrm{J} + 1347\ \mathrm{J} = \\ &= 2087\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{20}$$

mentre

$$Q_{ass} = Q^{B\to C} = 6499\,\mathrm{J} \tag{21}$$

e dunque

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{2087\,\mathrm{J}}{6499\,\mathrm{J}} = 0.32 \tag{22}$$

che coincide col risultato (16).