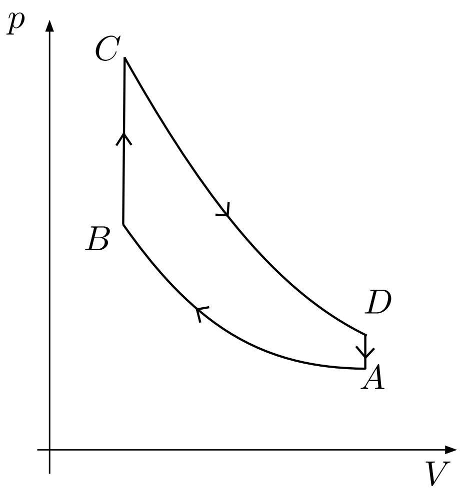
Esercizio (tratto dal Problema 13.35 del Mazzoldi 2)

Un gas ideale biatomico ($n = 0.42\,\mathrm{mol}$) descrive il seguente ciclo reversibile

1. compressione isoterma dallo stato A ($V_A = 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$; $p_A = 1\,\mathrm{bar}$) allo stato B ($V_B = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$);
2. riscaldamento isocoro dallo stato B allo stato C ($p_C = 10\,\mathrm{bar}$);
3. espansione adiabatica dallo stato C allo stato D;
4. raffreddamento isocoro dallo stato D allo stato A ($V_D = V_A$)

Calcolare

1. le coordinate termodinamiche dei quattro stati;
2. i lavori e i calori scambiati nelle quattro trasformazioni;
3. il rendimento del ciclo



SOLUZIONE
Dati noti:
Scriviamo i dati iniziali convertendo in unità del Sistema Internazionale

$$\boxed{\begin{array}{lcl} n & = & 0.42\,\mathrm{mol} \\ V_A & = & 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \\ p_A & = & 1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V_B & = & 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \\ V_C & = & 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \\ p_C & = & 1\cdot 10^6\,\mathrm{Pa} \\ V_D & = & 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \end{array}} \tag{1}$$

1. Calcoliamo innanzitutto i parametri termodinamici dei 4 stati:

   - **Stato A**
     Conosciamo p_A e V_A. Dall'equazione di stato dei gas perfetti applicata allo stato A abbiamo

     $$p_A V_A = nRT_A \qquad \Rightarrow \qquad T_A = \frac{p_A V_A}{nR} \tag{2}$$

     Sostituendo i dati otteniamo

     $$\begin{aligned} T_A &= \frac{1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{0.42\,\mathrm{m}\cancel{\mathrm{o}}\mathrm{l}\ \cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}\cancel{\mathrm{o}}\mathrm{l}\ \mathrm{K}}} = \\ &= 286\,\mathrm{K}\underbrace{\frac{\mathrm{Pa}\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{J}}}_{=1} \\ &\quad [\text{uso } \tfrac{\mathrm{Pa}\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{J}} = \tfrac{\frac{\cancel{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot\mathrm{m}^3}{\cancel{\mathrm{N}}\,\mathrm{m}} = \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 1] \\ &= 286\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{3}$$

   - **Stato B**
     Conosciamo V_B e sappiamo che $T_B = T_A$ ($A \to B$ isoterma). Dall'equazione dei gas perfetti applicata allo stato B

     $$p_B V_B = nRT_B \tag{4}$$

     otteniamo

     $$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{V_B} = \frac{p_A V_A}{V_B} \tag{5}$$

     Sostituendo i dati otteniamo

     $$\begin{aligned} p_B &= \frac{1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 10^{-2}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}{2\cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3}} = \\ &= 5\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{6}$$

   - **Stato C**
     Dato che $B \to C$ è isocora, sappiamo che

     $$V_C = V_B = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{7}$$

Inoltre conosciamo p_C. Dall'equazione dei gas perfetti applicata allo stato C

$$p_C V_C = nRT_C \tag{8}$$

otteniamo allora

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} \tag{9}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{1 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{0.42\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l\ K}}} = \\ &= 573\,\mathrm{K} \underbrace{\frac{\mathrm{Pa\,m}^3}{\mathrm{J}}}_{=1} \simeq 573\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{10}$$

- **Stato D**
  Dato che $D \to A$ è isocora, sappiamo che

$$V_D = V_A = 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \tag{11}$$

Sappiamo inoltre che $C \to D$ è adiabatica. Dall'equazione della adiabatica

$$pV^\gamma = \mathrm{cost}$$

abbiamo che

$$p_C V_C^\gamma = p_D V_D^\gamma \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad p_D = p_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^\gamma \tag{13}$$

Ricordando che

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} \qquad \text{(gas biatomico)} \tag{14}$$

otteniamo

$$p_D = p_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{7/5} \tag{15}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} p_D &= 1 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa} \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}{10^{-2}\,\cancel{\mathrm{m}^3}} \right)^{7/5} = \\ &= 1.05 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{16}$$

Inoltre dall'equazione di stato la temperatura vale

$$T_D = \frac{p_D V_D}{nR} \tag{17}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{1.05 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3}{0.42\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l\ K}}} = \\ &= 301 \frac{\mathrm{Pa\,m}^3}{\mathrm{J}}\,\mathrm{K} = \\ &\quad [\text{uso } \tfrac{\mathrm{Pa\,m}^3}{\mathrm{J}} = \tfrac{\frac{\cancel{\mathrm{N}}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{m}^3}{\cancel{\mathrm{N}}\,\mathrm{m}} = \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 1] \\ &= 301\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{18}$$

2. Calcoliamo ora i calori ed i lavori scambiati

   - **A → B** (isoterma)

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= \int_{V_A}^{V_B} p\, dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_A}{V}\, dV = \\ &= nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = \\ &= p_A V_A \ln\frac{V_B}{V_A} \end{aligned} \tag{19}$$

   Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} W^{A\to B} &= 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 10^{-2}\cdot \mathrm{m}^3 \ln\left(\frac{2\cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}{10^{-2}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}\right) = \\ &= 10^3\ \ln\frac{1}{5}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^3 = \\ &= -1.61\,\mathrm{kJ} \qquad \text{(lavoro subìto)} \end{aligned} \tag{20}$$

   Per calcolare il calore, osserviamo che, essendo $A \to B$ un'isoterma, dal primo principio abbiamo

$$Q^{A\to B} - W^{A\to B} = \Delta U^{A\to B} = U(B) - U(A) = nc_V\,(\underbrace{T_B - T_A}_{=0}) = 0 \tag{21}$$

   e dunque

$$Q^{A\to B} = W^{A\to B} = -1.61\,\mathrm{kJ} \qquad \text{(calore ceduto)} \tag{22}$$

   - **B → C** (isocora)
   Per un'isocora si ha

$$W^{B\to C} = 0 \tag{23}$$

   e che

$$Q^{B\to C} = nc_V(T_C - T_B) \tag{24}$$

   Ricordando che $T_B = T_A$ e che per un gas biatomico

$$c_V = \frac{5}{2}R \to \frac{c_V}{R} = \frac{5}{2} \tag{25}$$

   otteniamo

$$Q^{B\to C} = n\frac{5}{2}R\,(T_C - T_A) \tag{26}$$

   Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} Q^{B\to C} &= 0.42\,\mathrm{m}\cancel{\mathrm{o}}\mathrm{l}\ \frac{5}{2}\cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}\cancel{\mathrm{o}}\mathrm{l}\ \cancel{\mathrm{K}}}(573\,\cancel{\mathrm{K}} - 286\,\cancel{\mathrm{K}}) = \\ &= 2.5\,\mathrm{kJ} \qquad \text{(calore assorbito)} \end{aligned} \tag{27}$$

- **C → D** (adiabatica)
  Per un'adiabatica
  $$Q^{C\to D} = 0 \tag{28}$$
  Per calcolare il lavoro possiamo procedere in due modi equivalenti
  (a) **modo 1**
  Dal primo principio osserviamo che per un'adiabatica
  $$\Delta U^{C\to D} = \underbrace{Q^{C\to D}}_{=0} - W^{C\to D} \tag{29}$$
  da cui
  $$\begin{aligned} W^{C\to D} &= -\Delta U^{C\to D} = -(U(D) - U(C)) = \\ &= -nc_V(T_D - T_C) = \\ &= nc_V(T_C - T_D) = \\ &= n\frac{5}{2}R\,(T_C - T_D) \end{aligned} \tag{30}$$
  Sostituendo i valori si ottiene
  $$\begin{aligned} W^{C\to D} &= 0.42\,\mathrm{m\cancel{o}l}\ \frac{5}{2}\cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l}\ \cancel{\mathrm{K}}}(573\,\cancel{\mathrm{K}} - 301\,\cancel{\mathrm{K}}) = \\ &= 2.37\,\mathrm{kJ} \qquad \text{(lavoro eseguito)} \end{aligned} \tag{31}$$
  (b) **modo 2**
  Ricordando che per un'adiabatica $pV^\gamma = \text{cost} = p_C V_C^\gamma$, si ha
  $$\begin{aligned} W^{C\to D} &= \int_{V_C}^{V_D} p\,dV = \int_{V_C}^{V_D} \frac{p_C V_C^\gamma}{V^\gamma}\,dV = \\ &= p_C V_C^\gamma \int_{V_C}^{V_D} V^{-\gamma}\,dV = \\ &= p_C V_C^\gamma \frac{1}{-\gamma+1}\left(V_D^{-\gamma+1} - V_C^{-\gamma+1}\right) = \\ &= p_C V_C^\gamma \frac{1}{\gamma-1}\left(V_C^{-\gamma+1} - V_D^{-\gamma+1}\right) = \\ &= \frac{p_C V_C}{\gamma-1}\left(1 - \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}\right) = \\ &= \frac{p_C V_B}{\gamma-1}\left(1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}\right) \end{aligned} \tag{32}$$
  Notando che
  $$\gamma = \frac{c_p}{c_V} \qquad \to \qquad \frac{1}{\gamma-1} = \frac{1}{\frac{c_p}{c_V} - 1} = \frac{c_V}{c_p - c_V} = \frac{c_V}{R} \tag{33}$$
  e che per un gas biatomico
  $$c_V = \frac{5}{2}R \qquad \to \qquad \frac{1}{\gamma-1} = \frac{c_V}{R} = \frac{5}{2} \tag{34}$$

otteniamo

$$W^{C \to D} \quad = \quad \frac{5}{2} p_C V_B \left(1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{2/5}\right) \tag{35}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} W^{C \to D} &= \frac{5}{2} \cdot 10^6 \,\mathrm{Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{m}^3 \left(1 - \left(\frac{2 \cdot 10^{-3} \,\cancel{\mathrm{m}^3}}{10^{-2} \,\cancel{\mathrm{m}^3}}\right)^{2/5}\right) = \\ &= 2.37 \cdot 10^3 \,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^3 = \\ &= 2.37 \,\mathrm{kJ} \end{aligned} \tag{36}$$

che coincide con la (31).

- **D → A** (isocora)
  Per il lavoro si ha

$$W^{D \to A} = 0 \tag{37}$$

in quanto è un'isocora. Per il calore possiamo sfruttare la formula del calore in un'isocora

$$\begin{aligned} Q^{D \to A} &= n c_V (T_A - T_D) = \\ &= n \frac{5}{2} R (T_A - T_D) \end{aligned} \tag{38}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} Q^{D \to A} &= 0.42 \,\mathrm{m}\cancel{\mathrm{o}}\mathrm{l} \; \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}\cancel{\mathrm{o}}\mathrm{l} \; \cancel{\mathrm{K}}} (286 \,\cancel{\mathrm{K}} - 301 \,\cancel{\mathrm{K}}) = \\ &= -0.131 \,\mathrm{kJ} \qquad \text{(calore ceduto)} \end{aligned} \tag{39}$$

3. **Rendimento**

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q^{A \to B}| + |Q^{D \to A}|}{|Q^{B \to C}|} = \\ &= 1 - \frac{|-1.61 \,\mathrm{kJ}| + |-0.131 \,\mathrm{kJ}|}{2.5 \,\mathrm{kJ}} = \\ &= 0.304 \end{aligned} \tag{40}$$