Esercizio **(tratto dal Problema 11.13 del Mazzoldi-Nigro-Voci)**

0.25 moli di un gas ideale monoatomico a temperatura $T_0 = 283\,\mathrm{K}$ sono contenute nella parte inferiore A di un cilindro adiabatico verticale. Un pistone di massa trascurabile e spessore trascurabile divide la parte inferiore A da quella superiore B in cui c'è il vuoto. Due masse $m_1 = 36\,\mathrm{kg}$ e m_2 sono appese al pistone tramite un filo che esce dal cilindro. Il sistema è inizialmente in equilibrio termodinamico con il pistone a distanza $h = 62.5\,\mathrm{cm}$ dal fondo del cilindro.

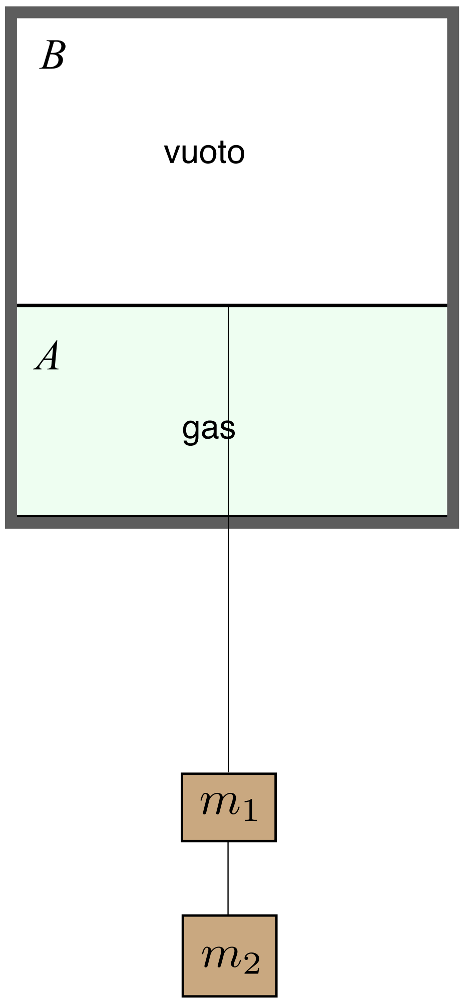
1. Calcolare il valore della massa m_2.

Si taglia il filo che collega m_2 a m_1. Si osserva che, quando il gas è di nuovo in equilibrio, esso occupa un volume doppio rispetto a quello iniziale.

2. Calcolare il lavoro compiuto dal gas in questa trasformazione.

Si riattacca la massa m_2 al filo e si attende che il gas raggiunga nuovamente l'equilibrio.

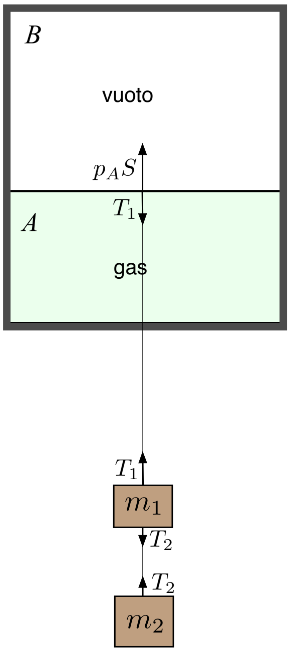
3. Calcolare la distanza del pistone dal fondo del cilindro e la temperatura del gas.



SOLUZIONE

Dati Noti:
$n = 0.25\,\mathrm{mol}$
$T_0 = 283\,\mathrm{K}$
$m_1 = 36\,\mathrm{kg}$
$h = 0.625\,\mathrm{m}$

1. Iniziamo dalla prima parte del problema in cui entrambe le masse sono attaccate al filo



- Intuitivamente, la forza che il gas esercita sull'ambiente è data da $p\,S$, dove

$$S = \text{superficie del pistone}$$

mentre la forza che l'ambiente esercita sul gas è data dal peso delle due masse m_1 e m_2 (non c'è la pressione atmosferica perché dal testo sappiamo che nella parte B del cilindro c'è il vuoto). Per vederlo espressamente, consideriamo le forze che agiscono su m_1, m_2 e sul pistone. Essendo tutti in equilibrio si ha

$$\left\{ \begin{array}{lcl} pS - T_1 & = & 0 \\ T_1 - m_1 g - T_2 & = & 0 \\ m_2 g - T_2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Risolvendo il sistema (1) ricaviamo subito che

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_2 & = & m_2 g \\ T_1 & = & (m_1 + m_2) g \end{array} \right. \tag{2}$$

e

$$pS = (m_1 + m_2) g \tag{3}$$

come avevamo intuito.

- Dall'equazione dei gas ideali applicata allo stato di equilibrio iniziale abbiamo che

$$
\begin{aligned}
pV_A &= nRT_0 \\
&\Downarrow \qquad \text{[moltiplico e divido per la superficie } S \text{ del pistone]} \\
\underbrace{pS}_{=(m_1+m_2)g} \cdot \underbrace{\frac{V_A}{S}}_{=h} &= nRT_0 \\
&\Downarrow \\
m_1 + m_2 &= \frac{nRT_0}{gh} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

da cui

$$m_2 = \frac{nRT_0}{gh} - m_1 \qquad (5)$$

Sostituendo i valori

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{0.25\,\cancel{\mathrm{mol}} \cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{mol}}\,\cancel{\mathrm{K}}} \cdot 283\,\cancel{\mathrm{K}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.625\,\mathrm{m}} - 36\,\mathrm{kg} = \\
&\quad [\text{uso } \mathrm{J} = \tfrac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}] \\
&= \frac{0.25 \cdot 8.314 \cdot 283}{9.81 \cdot 0.625} \frac{1}{\frac{\cancel{\mathrm{m}^2}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}} \frac{\mathrm{kg}\,\cancel{\mathrm{m}^2}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} - 36\,\mathrm{kg} = \\
&= 96\,\mathrm{kg} - 36\,\mathrm{kg} = \\
&= 60\,\mathrm{kg} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

2. Consideriamo ora la fase in cui la massa m_2 viene staccata. Il gas si espande quasi-liberamente (dove il 'quasi' è dovuto al fatto che la massa m_1 rimane comunque attaccata al pistone) ed il pistone risale. Siccome l'espansione è incontrollata, non sappiamo se avvenga quasi-staticamente, ossia passando attraverso stati di equilibrio termodinamico in cui p e T del gas sono ben definite, e dunque non possiamo calcolare il lavoro compiuto dal gas come $W = \int p\,dV$. Allora possiamo procedere in due modi:

   - **Primo modo**
     - Osserviamo che durante l'espansione la forza che il gas esercita sull'ambiente è, istante per istante, uguale ed opposta alla forza che l'ambiente esercita sul gas (principio di azione-reazione).

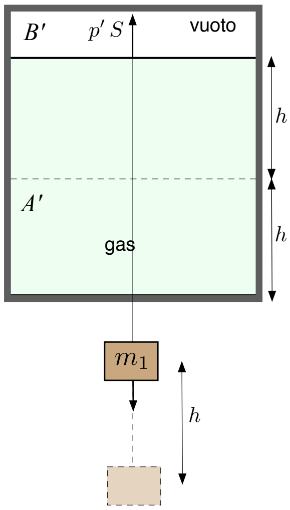
$$F_{\text{gas} \to \text{amb}} = -F_{\text{amb} \to \text{gas}} = -(-m_1 g) = +m_1 g \qquad (7)$$

     - Alla fine dell'espansione il pistone è risalito di un'altezza h, dato che il testo ci dice che il volume del gas è raddoppiato. Pertanto il lavoro W scambiato dal gas vale

$$
\begin{aligned}
W = W_{\text{gas} \to \text{amb}} &= -W_{\text{amb} \to \text{gas}} = -W_{\text{peso } m_1} = \\
&= E_P^{fin} - E_P^{in} = \\
&= m_1 g (z_{m_1}^{fin} - z_{m_1}^{in}) = \\
&= m_1 g h \qquad (8)
\end{aligned}
$$

     Sostituendo i valori si ottiene

$$
\begin{aligned}
W &= 36\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\, 0.625\,\mathrm{m} = \qquad [\text{uso } \mathrm{J} = \mathrm{kg\,m/s}^2] \\
&= 220.7\,\mathrm{J} \qquad (9)
\end{aligned}
$$



- **Secondo modo**
  - Sfruttiamo il fatto che per una trasformazione adiabatica, *indipendentemente* dal fatto che sia quasi-statica o no, il lavoro è pari a (meno) la variazione di energia interna dal sistema

$$
\begin{aligned}
\Delta U &= \underbrace{Q}_{=0} - W \\
&\Downarrow \\
W &= -\Delta U = -n c_V (T' - T_0)
\end{aligned}
$$

dove T' è la nuova temperatura di equilibrio al termine dell'espansione quasi-libera del gas. Ricordando che per un gas monoatomico $c_V = \frac{3}{2}R$, si ha

$$
W = \frac{3}{2} nR(T_0 - T') \tag{10}
$$

  - Per trovare T' sfruttiamo ora l'equazione di stato dei gas perfetti. Indicando con p' e V' la nuova pressione ed il nuovo volume, abbiamo

$$
\begin{aligned}
p'V' &= nRT' \\
&\Downarrow \qquad \text{[moltiplico e divido per la superficie } S \text{ del pistone]} \\
\underbrace{p'S}_{=m_1 g} \cdot \underbrace{\frac{V'}{S}}_{=2h} &= nRT' \\
&\Downarrow \\
T' &= \frac{2 m_1 g h}{nR}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Sostituendo i valori

$$
T' = \frac{2 \cdot 220.7\,\cancel{\mathrm{J}}}{0.25\,\cancel{\mathrm{mol}} \cdot 8.314\,\frac{\cancel{\mathrm{J}}}{\cancel{\mathrm{mol}}\,\mathrm{K}}} = 212.4\,\mathrm{K} \tag{12}
$$

– Inserendo ora l'Eq.(12) nell'espressione (10) otteniamo

$$\begin{aligned} W &= \frac{3}{2} nR(T_0 - T') = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 0.25\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l\,\cancel{K}}} (283 - 212.4)\,\cancel{\mathrm{K}} = \\ &= 220.1\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{13}$$

che coincide col risultato (9) trovato col primo modo, a meno di un errore di meno del 3 per mille dovuto agli arrotondamenti nei calcoli.

Osservazione 1

Con i due modi di risoluzione abbiamo ottenuto due espressioni per il lavoro del gas,

$$\text{Modo 1:} \quad \to \quad W = m_1 g h \tag{14}$$

$$\text{Modo 2:} \quad \to \quad W = \frac{3}{2} nR \left(T_0 - \frac{2 m_1 g h}{nR} \right) \tag{15}$$

dove la (15) è stata ottenuta sostituendo l'espressione (11) nell'Eq.(10). Le due espressioni sono apparentemente assai diverse, anche se i risultati numerici sono (praticamente) coincidenti. Si tratta dunque di un caso? No. Cerchiamo di capire perché. Lo stato iniziale è fissato: la temperatura T_0 è nota ed il volume iniziale è dato dall'altezza iniziale h. In questo modo la pressione è determinata e fissa in maniera univoca la *somma* m_1+m_2 [vedi Eq.(4)] (ma *non* il valore di m_1). Si noti che per lo stato iniziale il tipo di gas ideale (se monoatomico, biatomico o poliatomico) è totalmente ininfluente. Ora, una volta fissata la tipologia di gas ideale (in questo caso monoatomico) chi ha scelto i dati del problema non avrebbe potuto scegliere in maniera indipendente il volume finale (in questo caso corrispondente ad un'altezza $2h$) e la massa m_1, proprio perché avrebbe dovuto rispettare il primo principio ed il fatto che il lavoro del sistema sull'ambiente è opposto al lavoro dell'ambiente sul sistema:

$$W = \begin{cases} -\Delta U + \underbrace{Q}_{=0} = -nc_V(T' - T_0) \\ -W_{\text{amb} \to \text{gas}} = +m_1 g h \end{cases} \tag{16}$$

Pertanto *necessariamente* deve valere l'uguaglianza

$$\begin{aligned} nc_V(T_0 - T') &= m_1 g h \\ &\Downarrow \\ T' &= T_0 - \frac{m_1 g h}{n c_V} \end{aligned} \tag{17}$$

E' facile vedere che ciò determina in modo univoco l'altezza finale h'. Infatti:

$$\begin{aligned} p'V' &= nRT' \\ &\Downarrow \qquad \text{[moltiplico e divido per la superficie } S \text{ del pistone]} \\ \underbrace{p'S}_{=m_1 g} \cdot \underbrace{\frac{V'}{S}}_{=h'} &= nRT' \\ &\Downarrow \\ h' &= \frac{nRT'}{m_1 g} \end{aligned} \tag{18}$$

ossia, sostituendo (17) nell'Eq.(18),

$$\boxed{h' = \frac{nRT_0}{m_1 g} - \frac{R}{c_V} h} \tag{19}$$

da cui si vede che, scelto un valore per m_1 e scelta la tipologica di gas ideale (monoatomico, biatomico...) che determina il valore di c_V, l'altezza finale h' è univocamente determinata. Pertanto, una volta fissati i dati sullo stato iniziale (qui rappresentati dalla temperatura iniziale T_0) e la tipologia del gas ($\rightarrow$ il valore di c_V), i dati noti m_1 e $h' = 2h$ sullo stato dopo l'espansione non sono tra loro indipendenti. Di fatto il testo dà un numero ridondante di dati. Si può dare anche un'espressione più semplice di questa relazione: sfruttando il legame tra T_0 e la somma $m_1 + m_2$ [vedi Eq.(4)] si trova

$$\boxed{h' = h\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} - \frac{R}{c_V}\right)} \tag{20}$$

da cui di nuovo si vede che, una volta fissati i dati sullo stato iniziale (qui rappresentati dalla somma $m_1 + m_2$ legata alla pressione iniziale) e la tipologia del gas ($\rightarrow$ il valore di c_V) i dati noti m_1 e $h' = 2h$ sullo stato dopo l'espansione non sono tra loro indipendenti. E' facile verificare che, sostituendo $c_V = \frac{3}{2}R$ (gas monoatomico) e $m_1 = 36\,\text{kg}$ e $m_2 = 60\,\text{kg}$, si ottiene proprio $h' = 2h$.

Osservazione 2

Ci chiediamo: Avremmo potuto calcolare lo stato finale A' di questa seconda fase usando l'equazione di un'adiabatica quasi-statica ? No, perché il sistema non passa attraverso stati di equilibrio. Per mostrarlo, supponiamo che il sistema si espanda secondo l'equazione dell'adiabatica quasi-statica. Certamente conosciamo la pressione finale p', determinata dalla sola massa m_1 secondo $p'S = m_1 g$. Calcoliamo il volume V' finale (o, equivalentemente, l'altezza h' finale) di questa seconda fase. Se lo stato finale giacesse lungo un'adiabatica quasi-statica, dovrebbe valere:

$$\begin{aligned}
pV_A^\gamma &= p'V'^\gamma \\
&\Downarrow \\
\left(\frac{V'}{V_A}\right)^\gamma &= \frac{p}{p'} \\
&\Downarrow \\
\left(\frac{\cancel{S}\,h'}{\cancel{S}\,h}\right)^\gamma &= \frac{p\,S}{p'\,S} = \frac{(m_1+m_2)\cancel{g}}{m_1\cancel{g}} \\
&\Downarrow \\
\frac{h'}{h} &= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\Downarrow \quad [\gamma = \tfrac{5}{3} \text{ per gas monoatomico}] \\
h' &= h\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{3}{5}}
\end{aligned} \tag{21}$$

Sostituendo i valori $m_1 = 36\,\text{kg}$ e $m_2 = 60\,\text{kg}$ si trova $h' = 1.8h$ che è dunque *inferiore* all'altezza $h' = 2h$ che effettivamente raggiunge con l'espansione adiabatica quasi-libera (non quasi-statica).

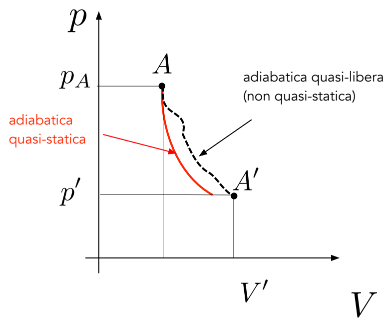
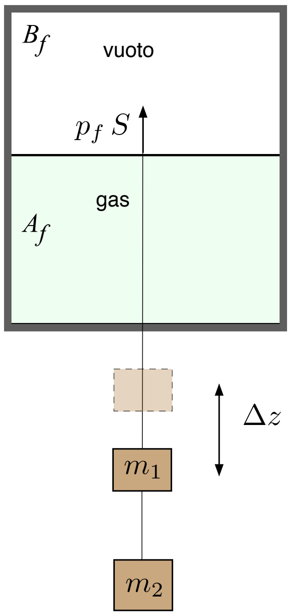


Figure 1: la curva tratteggiata rappresenta l'espansione adiabatica quasi-libera che il gas effettua. La curva rossa solida rappresenta la curva di un'ipotetica adiabatica quasi-statica che parte dallo stesso stato iniziale e raggiunge uno stato finale alla stessa pressione. Il volume finale (e la temperatura finale) sono diversi.

3. Consideriamo ora la terza fase, in cui la massa m_2 viene riattaccata ed il gas viene dunque compresso. Indichiamo con $|\Delta z|$ la variazione in altezza del pistone (verso il basso)



- Alla nuova posizione di equilibrio finale , abbiamo

$$\begin{cases} p_f & = \text{pressione finale} \\ T_f & = \text{temperatura finale} \\ V_f & = S(2h - |\Delta z|) \text{ volume finale} \end{cases} \tag{22}$$

- Per la legge dei gas perfetti

$$
\begin{aligned}
p_f V_f &= nRT_f \\
&\Downarrow \qquad \text{[moltiplico e divido per la superficie } S \text{ del pistone]} \\
\underbrace{p_f S}_{=(m_1+m_2)g} \cdot \underbrace{\frac{V_f}{S}}_{=2h-|\Delta z|} &= nRT_f \\
&\Downarrow \\
T_f &= \frac{(m_1+m_2)g(2h-|\Delta z|)}{nR}
\end{aligned} \tag{23}
$$

- D'altra parte per il primo principio della termodinamica la variazione di energia interna del gas è data da

$$
\Delta U = Q - \underbrace{W}_{W_{\text{gas} \to \text{amb}}} \tag{24}
$$

Ricordando che
- il calore Q scambiato è nullo perché il contenitore è adiabatico;

- la variazione di energia interna per un gas perfetto è data da $\Delta U = nc_V \Delta T$ (dove $c_V = \frac{3}{2}R$ perché il gas è monoatomico);

abbiamo

$$
\begin{aligned}
\Delta U &= 0 - W_{\text{gas} \to \text{amb}} \\
&\Downarrow \\
nc_V (T_f - T') &= + \underbrace{W_{\text{amb} \to \text{gas}}}_{W_{\text{peso } (m_1 + m_2)}} \\
&\Downarrow \\
n\frac{3}{2}R (T_f - T') &= -(E_P^{fin} - E_P^{in}) \\
&\Downarrow \\
\frac{3}{2}nR (T_f - T') &= (m_1+m_2)g|\Delta z|
\end{aligned} \tag{25}
$$

- Le due equazioni (23) e (25) sono due equazioni per le due incognite T_f e $|\Delta z|$.

$$
\begin{cases}
T_f = \dfrac{(m_1+m_2)g(2h-|\Delta z|)}{nR} \\
\frac{3}{2}nR (T_f - T') = (m_1+m_2)g|\Delta z|
\end{cases} \tag{26}
$$

Per risolvere il sistema sostituiamo la prima nella seconda

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}nR\left(\frac{(m_1+m_2)g(2h-|\Delta z|)}{nR}-T'\right) &= (m_1+m_2)g|\Delta z| \\
&\Downarrow \\
\frac{3}{2}(m_1+m_2)g(2h-|\Delta z|)\ -\frac{3}{2}nRT' &= (m_1+m_2)g|\Delta z| \\
&\Downarrow \\
3(m_1+m_2)gh\ -\frac{3}{2}nRT' &= \frac{5}{2}(m_1+m_2)g|\Delta z| \\
&\Downarrow \qquad\qquad [\text{divido per } \tfrac{5}{2}(m_1+m_2)g] \\
\frac{6}{5}h\ -\frac{3}{5}\frac{nRT'}{(m_1+m_2)g} &= |\Delta z|
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Sostituendo i valori

$$
\begin{aligned}
|\Delta z| &= \frac{6}{5}0.625\,\mathrm{m}\ -\frac{3}{5}\frac{0.25\,\cancel{\mathrm{mol}}\cdot 8.314\,\frac{\cancel{\mathrm{J}}}{\cancel{\mathrm{mol}}\,\cancel{\mathrm{K}}}\cdot 212.4\,\cancel{\mathrm{K}}}{(36+60)\,\mathrm{kg}\ \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\
&= 0.75\,\mathrm{m}-0.28\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \qquad [\text{uso J} = \mathrm{kg}\,\tfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}] \\
&= 0.75\,\mathrm{m}-0.28\ \mathrm{m} = \\
&= 0.47\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Pertanto la nuova altezza del pistone dal fondo del cinindro è

$$
h_f = 2h-|\Delta z| = 2\cdot 0.625\,\mathrm{m}-0.47\,\mathrm{m} = 0.78\,\mathrm{m}
\tag{29}
$$

- Dalla prima delle equazioni (26) ricaviamo

$$
\begin{aligned}
T_f &= \frac{(36+60)\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.78\,\mathrm{m}}{0.25\,\cancel{\mathrm{mol}}\cdot 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{mol}}\,\mathrm{K}}} = \\
&= \frac{96\cdot 9.81\ \cdot 0.78\,\mathrm{m}}{0.25\cdot 8.314}\,\mathrm{K}\,\frac{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{J}} = \\
&= 353.4\,\mathrm{K}
\end{aligned}
\tag{30}
$$