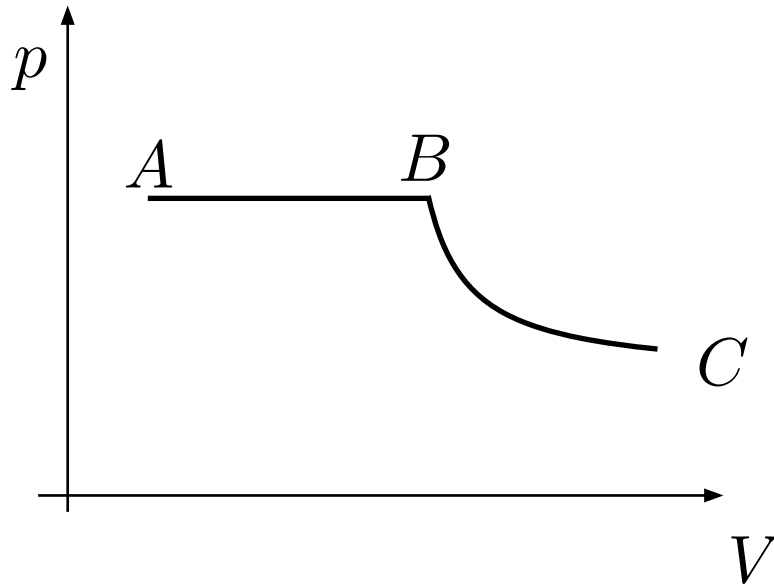


Esercizio (tratto dal Problema 13.6 del Mazzoldi 2)

Un gas ideale ($n = 0.45$ moli) effettua due trasformazioni quasi-statiche. Prima passa dallo stato A ($p_A = 2$ bar) allo stato B con una trasformazione isobara, compiendo un lavoro $W^{A \rightarrow B} = 640$ J. Successivamente il gas passa dallo stato B allo stato C ($T_C = 459.7$ K) con un'isoterma, compiendo un lavoro $W^{B \rightarrow C} = 454$ J.

1. Calcolare i volumi V_A , V_B e V_C ;
2. Si può tornare da C ad A con un'adiabatica quasi-statica ?



SOLUZIONE

Riscriviamo i dati iniziali, in modo che tutti i dati siano espressi in unità del Sistema Internazionale.

Dati noti:

n	$=$	0.45 mol
p_A	$=$	$2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
T_C	$=$	459.7 K
$W^{A \rightarrow B}$	$=$	640 J
$W^{B \rightarrow C}$	$=$	454 J

1. Per calcolare i volumi negli stati A, B e C procediamo sfruttando l'equazione di stato e l'espressione delle varie trasformazioni

- Dall'equazione di stato dei gas perfetti, applicata allo stato B, abbiamo

$$p_B V_B = nRT_B \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{nRT_B}{p_B} \quad (1)$$

D'altra parte sappiamo che

$$\begin{cases} T_B = T_C & (\text{perché } B \rightarrow C \text{ è un'isoterma}) \\ p_B = p_A & (\text{perché } A \rightarrow B \text{ è un'isobara}) \end{cases} \quad (2)$$

Sostituendo in (1) otteniamo:

$$V_B = \frac{nRT_C}{p_A} \quad (3)$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{0.45 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 459.7 \text{ K}}{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \\ &= 8.60 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{Pa}} = \\ &\quad [\text{uso } \text{J} = \text{Nm} \text{ e } \text{Pa} = \text{N/m}^2] \\ &= 8.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \end{aligned} \quad (4)$$

- Dall'espressione del lavoro, applicata alla trasformazione A→B, abbiamo

$$\begin{aligned} W^{A \rightarrow B} &= \int_{V_A}^{V_B} p \, dV = \\ &= [\text{A} \rightarrow \text{B} \text{ è un'isobara} \Rightarrow p \text{ non dipende dal volume, è costante}] \\ &= \underbrace{p}_{=p_A=p_B} \int_{V_A}^{V_B} dV = \\ &= p_A (V_B - V_A) \end{aligned} \quad (5)$$

da cui

$$V_A = V_B - \frac{W^{A \rightarrow B}}{p_A} \quad (6)$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned}
 V_A &= V_B - \frac{W^{A \rightarrow B}}{p_A} = \\
 &= 8.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - \frac{640 \text{ J}}{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \\
 &\quad [\text{uso } J = \text{Nm e } \text{Pa} = \text{N/m}^2] \\
 &= 5.40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3
 \end{aligned} \tag{7}$$

- Dall'espressione del lavoro per l'isoterma da B a C, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 W^{B \rightarrow C} &= \int_{V_B}^{V_C} p dV = \\
 &\quad [\text{lungo un'isoterma } p \text{ non è costante, ma dipende da } V, \\
 &\quad \text{quindi } \textit{non} \text{ possiamo portarla fuori dall'integrale. Uso} \\
 &\quad \text{allora l'equazione di stato.}] \\
 &= \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV = \\
 &= [\text{lungo un'isoterma } T \text{ è costante}] \\
 &= nR \underbrace{T}_{=T_B=T_C} \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = \\
 &= nRT_C \ln \frac{V_C}{V_B}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
 W^{B \rightarrow C} &= nRT_C \ln \frac{V_C}{V_B} \\
 \Downarrow \\
 \frac{W^{B \rightarrow C}}{nRT_C} &= \ln \frac{V_C}{V_B} \\
 \Downarrow \\
 &\quad (\text{prendo l'esponenziale di ambo i membri}) \\
 e^{\frac{W^{B \rightarrow C}}{nRT_C}} &= \frac{V_C}{V_B}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Pertanto

$$V_C = V_B e^{\frac{W^{B \rightarrow C}}{nRT_C}} \tag{10}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned}
 V_C &= 8.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \exp \left(\frac{454 \text{ J}}{0.45 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \cdot 459.7 \text{ K}} \right) = \\
 &\quad [\text{Controllo dimensionale: l'argomento di un exp deve essere adimensionale,} \\
 &\quad \text{semplifico le unità di misura}] \\
 &= 8.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \exp \left(\frac{454}{\underbrace{0.45 \cdot 8.314 \cdot 459.7}_{\text{adimensionale: OK}}} \right) = \\
 &= 8.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1.302 \\
 &= 11.20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3
 \end{aligned} \tag{11}$$

2. Le trasformazioni adiabatiche (quasi-statiche) sono caratterizzate da equazioni

$$pV^\gamma = \text{cost} \quad (\text{adiabatiche q.s.})$$

Siccome $\gamma = c_p/c_V > 1$, nel piano p - V le curve delle trasformazioni adiabatiche hanno una pendenza maggiore rispetto alle curve isoterme, che sono invece caratterizzate da equazioni

$$pV = \text{cost} \quad (\text{isoterme})$$

Osservo che lo stato A, rispetto allo stato C, è caratterizzato da:

$$\begin{cases} V_A < V_C \\ T_A < T_C \end{cases} \quad (12)$$

Partendo dal punto che identifica lo stato C nel piano p - V (vedi Fig.1), l'adiabatica che passa per C ha pendenza maggiore dell'isoterma BC. Di conseguenza, se ci si muove da C lungo tale adiabatica diminuendo il volume, la temperatura del gas aumenta; e se ci si muove lungo tale adiabatica verso temperature piú basse (zona azzurra) il volume aumenta.

In nessun caso si può dunque tornare allo stato A muovendosi lungo un'adiabatica quasi-statica che parte da C.

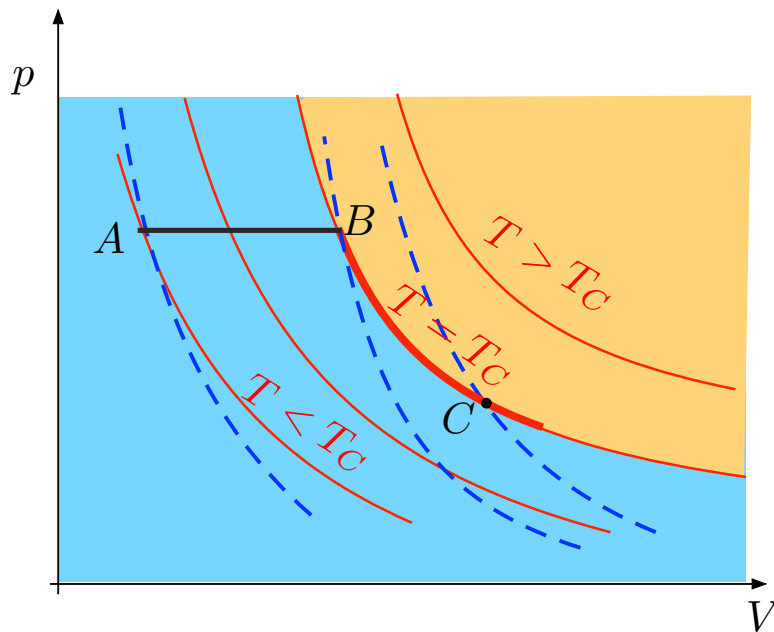


Figure 1: Nel piano $p - V$ le adiabatiche quasi-statiche ($pV^\gamma = \text{const}$, curve blu tratteggiate) hanno pendenza maggiore rispetto alle isoterme ($pV = \text{const}$, curve rosse continue). L'isoterma BC divide il piano p - V in due regioni: quella delle basse temperature $T < T_C$ (regione azzurra in basso a sinistra) e quella delle alte temperature $T > T_C$ (regione arancio in alto a destra).