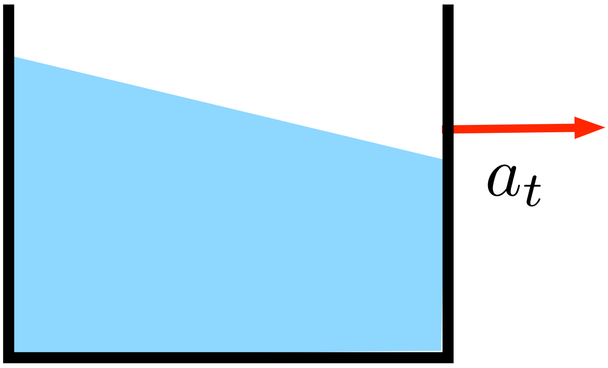
Esercizio (tratto dall'Esempio 9.12 del Mazzoldi 2)

Una vasca piena d'acqua avanza con accelerazione a_t orizzontalmente. Calcolare l'inclinazione della superficie libera.



Fabrizio Dolcini (http://staff.polito.it/fabrizio.dolcini/)
Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino - Esercitazioni di Fisica I

SOLUZIONE

- La superficie dell'acqua è una superficie a pressione costante (isobarica). Se non lo fosse, non rimarrebbe tale. Le superfici isobariche coincidono con le superfici equipotenziali. Pertanto dobbiamo trovare le superfici equipotenziali.

- Mettiamoci nel sistema di riferimento (NON inerziale) della vasca e consideriamo le forze che agiscono su un qualunque corpo di massa m. L'energia potenziale $E_p(x, y, z)$ deve soddisfare

$$\vec{\nabla} E_p = -\vec{F} \tag{1}$$

dove $\vec{\nabla} E_p$ è il gradiente dell'energia potenziale (scalare), ossia il *vettore*

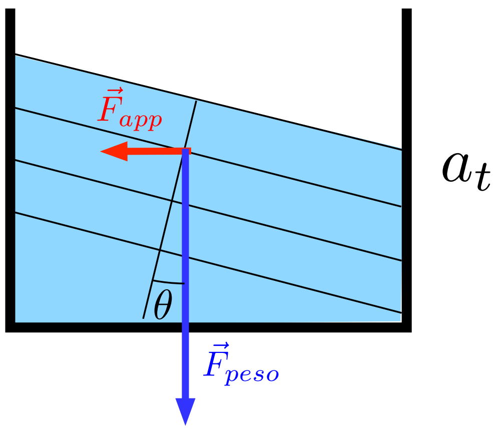
$$\vec{\nabla} E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z} \right) \tag{2}$$

Dato che il sistema è non-inerziale, la forza $\vec{F}$ è data da

$$\vec{F} = \vec{F}_{reale} + \vec{F}_{app} \tag{3}$$

  – forza reale $\rightarrow$ forza peso $\vec{F}_{reale} = \vec{F}_{peso} = -mg\hat{u}_z$;

  – forza apparente (dovuta all'accel. rispetto al sistema del lab) $\rightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t = -ma_t\,\hat{u}_x$;



- Pertanto l'Eq.(1) per l'energia potenziale diventa

$$\vec{\nabla} E_p = mg\hat{u}_z + ma_t\,\hat{u}_x \tag{4}$$

e, in componenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial x} &= ma_t \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} &= mg \end{cases} \tag{5}$$

E' facile vedere che le equazioni (5) sono risolte da

$$E_p(x, y, z) = ma_t\,x + mgz + C \tag{6}$$

con C una costante arbitraria, che possiamo porre uguale a 0 senza perdere di generalità.

- Le superfici equipotenziali sono date per definizione da

$$E_p(x,y,z) = \text{cost} \tag{7}$$

che sono i piani

$$E_p(x,y,z) = m(a_t\,x\,+\,gz) = \text{cost} \tag{8}$$

Per determinare l'angolazione delle superfici è sufficiente considerare

$$E_p(x,y,z) = m(a_t\,x\,+\,gz) = 0 \tag{9}$$

ossia

$$\frac{z}{x} = -\frac{a_t}{g} \qquad \rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{a_t}{g} \tag{10}$$

dove θ è l'angolo d'inclinazione.

$$\tag{11}$$