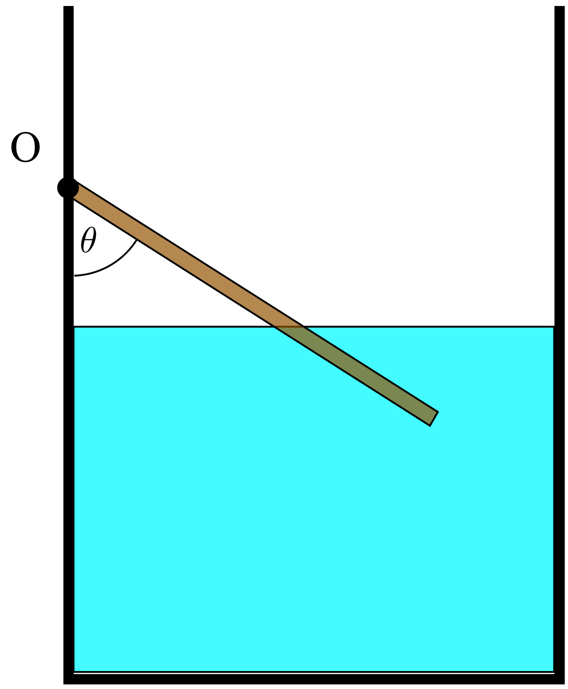
## Esercizio (tratto dall'Esempio 8.2 del Mazzoldi)

Un'asta sottile di lunghezza $l$, sezione $S$ e densità uniforme $\rho$ è incernierata nel suo estremo O alla parete di un recipiente parzialmente riempito d'acqua. L'asta può ruotare liberamente attorno ad un asse orizzontale passante per O. Mentre O è fuori dall'acqua, l'altro estremo è immerso e, all'equilibrio, la parte di lunghezza dell'asta che rimane fuori dall'acqua è $d$. Calcolare la densità del materiale di cui è composta l'asta, e la reazione vincolare del perno in O, in termini di $\rho_l$, $d$, $S$ e $l$.



**SOLUZIONE**
Sull'asta agiscono 3 forze

- forza peso $m\vec{g}$ ;

$$\begin{cases} \text{diretta lungo } z \text{ verso il basso} \\ \\ \text{applicata al CM dell'asta} \end{cases} \qquad m\vec{g} = -mg\,\hat{u}_z \tag{1}$$

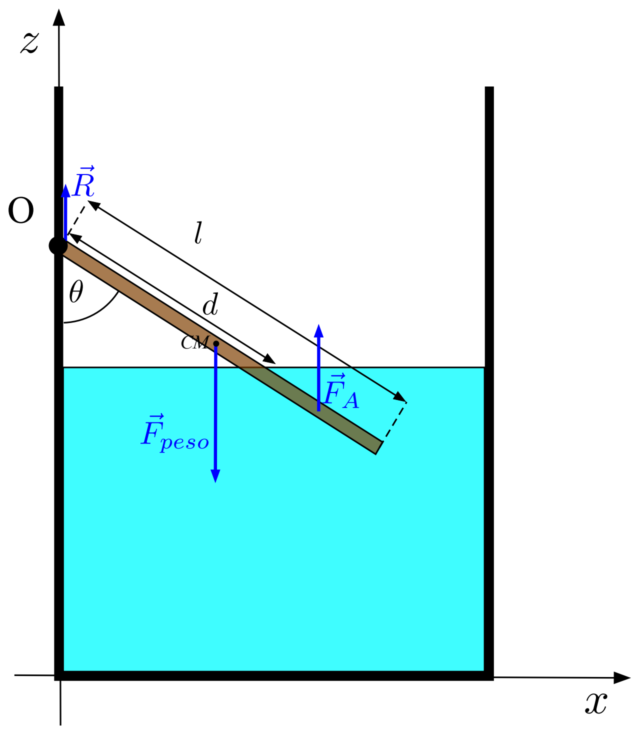
  dove $\hat{u}_z$ è il versore lungo $z$ verso l'alto.

- spinta di Archimede $\vec{F}_A$;

$$\begin{cases} \text{diretta lungo } z \text{ verso l'alto} \\ \\ \text{applicata al CM della parte } \textit{immersa} \end{cases} \qquad \vec{F}_A = m_l g\,\hat{u}_z \tag{2}$$

  dove $m_l$ è la massa dell'acqua che è stata spostata dalla parte *immersa* dell'asta.

- reazione vincolare $\vec{R}$ del perno O.




L'asta è un corpo rigido, che nel problema descritto si trova in condizioni di statica. Pertanto abbiamo due equazioni della statica

1. moto traslatorio del CM: il CM è fermo

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{R} = 0 \tag{3}$$

   da cui ricaviamo che

$$\vec{R} = -m\vec{g} - \vec{F}_A = (m - m_l)g\,\hat{u}_z \tag{4}$$

**Nota Bene:**
Siccome la massa $m$ dell'asta è incognita (essendo incognita la sua densità $\rho$), la reazione vincolare (4) rimane per il momento ancora incognita.

2. moto rotatorio: l'asta non ruota attorno ad alcun polo:

$$\vec{M}_{peso} + \vec{M}_A + \vec{M}_R = 0 \tag{5}$$

Scegliamo come polo il perno O stesso, in tal caso il braccio della reazione vincolare è nullo e (5) si riduce a

$$\vec{M}_{peso} + \vec{M}_A = 0 \tag{6}$$

Con questa scelta di polo abbiamo eliminato da (5) la reazione vincolare $\vec{R}$, che è ancora incognita.
Abbiamo ora

$$\begin{cases} \vec{M}_{peso} &= \underbrace{\frac{l}{2}}_{\text{braccio}} mg \sin\theta\, \hat{u}_y \\ \\ \vec{M}_A &= -\underbrace{\left(d + \frac{l-d}{2}\right)}_{\text{braccio}} m_l g \sin\theta\, \hat{u}_y \end{cases} \tag{7}$$

dove $\hat{u}_y$ è il versore *entrante* nel foglio.
Sostituendo (7) in (6) abbiamo

$$\left(\frac{l}{2} mg \sin\theta - \left(d + \frac{l-d}{2}\right) m_l g \sin\theta\right) \hat{u}_y = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} m &= \left(d + \frac{l-d}{2}\right) m_l \qquad (8) \\ &\Downarrow \\ m &= m_l \frac{l+d}{l} \qquad (9) \end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\begin{cases} m &= \rho S l \qquad \text{(massa totale dell'asta)} \\ \\ m_l &= \rho_l S (l-d) \qquad \text{(massa acqua corrispondente a parte immersa dell'asta)} \end{cases} \tag{10}$$

Sostituendo (10) in (9) otteniamo

$$\boxed{\rho = \rho_l \frac{l^2 - d^2}{l^2}} \tag{11}$$

dove la densità $\rho_l$ dell'acqua è nota.

3. Ora che abbiamo determinato la densità $\rho$ dell'asta, possiamo determinare la reazione vincolare (4). Infatti

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= (m - m_l) g\, \hat{u}_z && (12)\\
&\Downarrow \\
\vec{R} &= (\rho S l - \rho_l S (l-d)) g\, \hat{u}_z && (13)\\
&\Downarrow \\
\vec{R} &= \rho_l S \left( \frac{\rho}{\rho_l} l - (l-d) \right) g\, \hat{u}_z && (14)\\
&\Downarrow \quad \text{[uso (11)]} \\
\vec{R} &= \rho_l S \left( \frac{l^2 - d^2}{l} - (l-d) \right) g\, \hat{u}_z && (15)\\
&\Downarrow \\
\vec{R} &= \rho_l S \, (l-d) \, \frac{d}{l} \, g\, \hat{u}_z && (16)
\end{aligned}$$

La reazione vincolare è pertanto diretta verso l'alto, e la sua intensità si annulla sia quando $d = 0$ (asta posta orizzontalmente sulla superficie dell'acqua) che quando $d = l$ (asta posta verticalmente e completamente immersa).