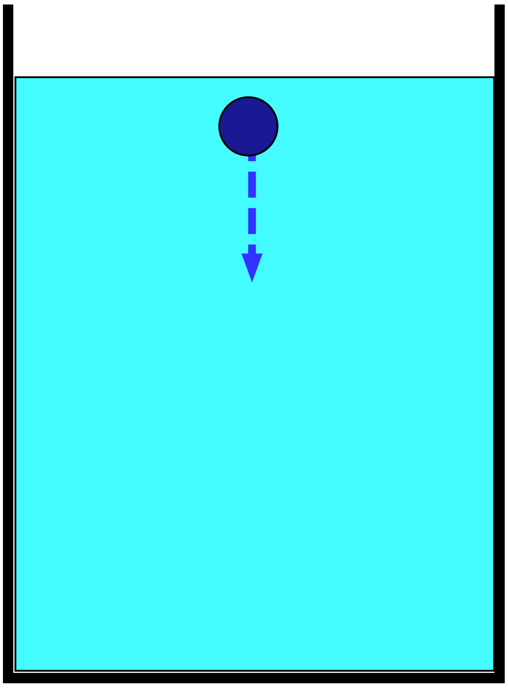
Esercizio (tratto dall'Esempio 9.10 del Mazzoldi 2)

Un corpo costituito da un materiale che ha una densità $\rho_c = 5\rho_a$ (dove ρ_a è la densità dell'acqua) viene immerso in un recipiente riempito con acqua, e viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza h rispetto al fondo del recipiente. Per effetto delle forze di attrito viscoso, durante la discesa il corpo perde l'8% della sua energia iniziale, raggiungendo il fondo con una velocità $v = 2\,\mathrm{m/s}$. Calcolare il valore di h.



SOLUZIONE
Il corpo è soggetto a

- forza peso $F_{\text{peso}} = -mg = -\rho_c V g$ (diretta verso il basso)
- spinta di Archimede $F_{\text{A}} = \rho_a V g$ (diretta verso l'alto)
- forze di attrito viscoso F_{att} (non conosciamo esplicitamente, ma sappiamo quanto consumano di energia meccanica)

dove V è il volume del corpo.

Mentre le prime due sono conservative, la terza non è conservativa. Quindi l'energia meccanica non si conserva. Possiamo applicare il teorema dell'energia meccanica (Attenzione: **non** il teorema di **conservazione** dell'energia meccanica !) che dice che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative

$$\Delta E_m = W_{\text{non-cons.}} \tag{1}$$

- l'energia meccanica è

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv^2 \ + E_p} \tag{2}$$

dove E_p è l'energia potenziale, dovuta alle *sole* forze conservative (per quelle non conservative non è definibile un'energia potenziale). Per un punto che si trova d una generica altezza z:

$$E_p(z) = -\int_0^z \vec{F}_c \cdot d\vec{l} \tag{3}$$

dove

$$\begin{aligned} F_{\text{c}} &= F_{\text{peso}} + F_{\text{A}} = \\ &= -\rho_c V g + \rho_a V g = -\rho_c V g + \frac{1}{5}\rho_c V g = \qquad (4) \\ &= -\frac{4}{5}\rho_c V g = \\ &= -m \times \frac{4}{5} g \qquad (5) \end{aligned}$$

Pertanto la somma delle forze conservative equivale ad una forza peso efficace dovuta ad un'accelerazione di gravità

$$g_{\text{eff}} = \frac{4}{5}g$$

ossia il corpo immerso nell'acqua è più 'leggero', grazie all'effetto della spinta di Archimede. Con questa analogia (oppure calcolando direttamente l'integrale (3)), si ricava che l'energia potenziale ad una generica altezza z è pari a

$$E_p = m g_{\text{eff}} h = m \frac{4}{5} g h \tag{6}$$

- La variazione ΔE^m di energia meccanica

$$\Delta E_m \; = \; E_m^{fin} - E_m^{in}$$

Inizialmente il corpo è lasciato cadere con velocità nulla. Quindi inizialmente l'energia meccanica è puramente potenziale:

$$E_m^{in} = 0 + E_p^{in} = m g_{\text{eff}} h = \frac{4}{5} m g h$$

Quando tocca il fondo del recipiente ($z = 0$) la sua energia potenziale è nulla e si ha solo energia cinetica

$$E_m^{fin} = E_k^{fin} + 0 = \frac{1}{2} m v^2$$

Pertanto

$$\Delta E_m = E_m^{fin} - E_{in}^{m} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{4}{5} m g h \tag{7}$$

- Il lavoro delle forze non conservative di attrito viscoso è negativo (perché l'energia diminuisce) e sappiamo dal testo che è pari all'8 % dell'energia iniziale

$$\begin{aligned} W_{\text{non-cons.}} &= -\frac{8}{100} E_m^{in} = \\ &= -\frac{8}{100} E_p^{in} = \\ &= -\frac{8}{100} \frac{4}{5} m g h \end{aligned} \tag{8}$$

[attenzione: dimenticare questo segno '-' è un errore grave perché significa non aver capito che l'energia meccanica diminuisce in presenza di forze dissipative]

Inserendo in (1) le espressioni (7) e (8) otteniamo

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{4}{5} m g h = -\frac{8}{100} \frac{4}{5} m g h$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{92}{100} \frac{4}{5} m g h \tag{9}$$

da cui

$$h = \frac{500}{92 \cdot 8} \frac{v^2}{g} \tag{10}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} h &= \frac{500}{92 \cdot 8 \cdot 9.81 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \left(2 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \\ &= 0.277 \, \text{m} \end{aligned} \tag{11}$$