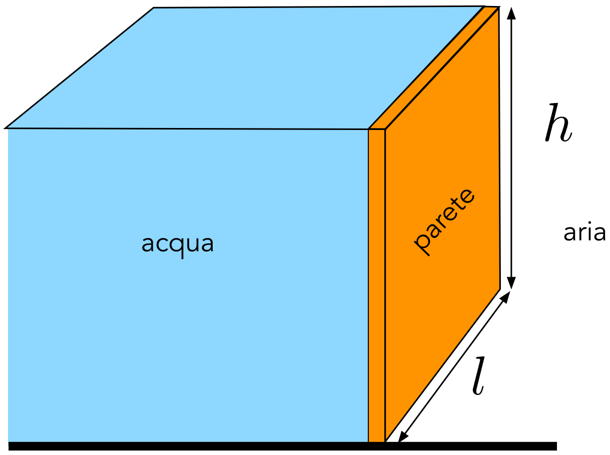
Esercizio (tratto dall'Esempio 9.8 del Mazzoldi 2)

Una parete larga $l = 5\,\mathrm{m}$ e alta $h = 3\,\mathrm{m}$ separa una massa d'acqua dall'ambiente.

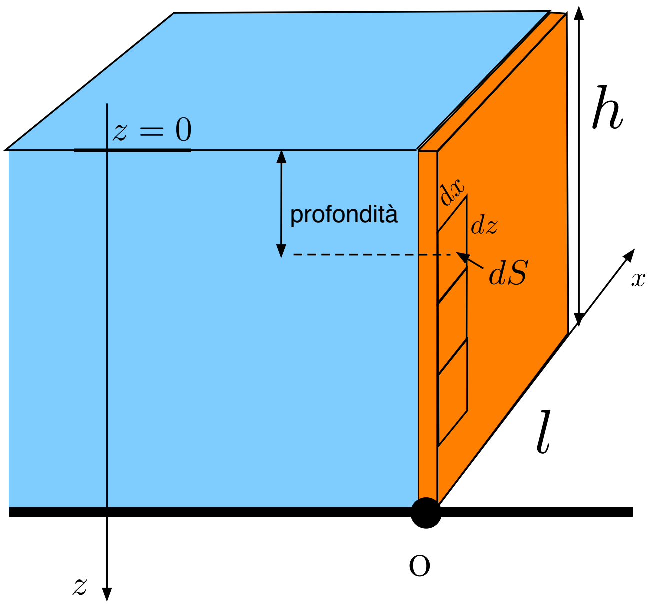
1. Calcolare a quale forza è sottoposta la parete.
2. Determinare le condizioni da applicare affinché la parete rimanga ferma



SOLUZIONE
Dati noti :
$l = 5\,\mathrm{m}$
$h = 3\,\mathrm{m}$

1. Le forze che agiscono sulla parete sono quelle dovute all'acqua (a sinistra della parete) e all'aria (a destra della parete).

   - Suddividiamo la parete in tanti elementini rettangolari infinitesimi di superficie $dS = dx\,dz$. Su ciascuno di essi, la forza è data da $dF = pdS = pdxdz$



   - **Forza esercitata dall'acqua sulla parete**

$$F^{\text{acqua}} = \iint p(z)\,dS = \int_0^l dx \int_0^h dz\,p(z) \tag{1}$$

Dalla legge di Stevino abbiamo che (se scegliamo l'asse z diretto verso il basso, con $z = 0$ corrispondente al pelo dell'acqua)

$$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{2}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica.
Pertanto

$$\begin{aligned}
F^{\text{acqua}} &= \int_0^h dz \int_0^l dx\,(p_0 + \rho g z) = \\
&= \int_0^h dz\,(p_0 + \rho g z) \underbrace{\int_0^l dx}_{=l} = \\
&= l \int_0^h dz\,(p_0 + \rho g z) = \\
&= l\left(p_0\,h + \rho g \frac{h^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

ossia

$$F^{\rm acqua} = p_0\, lh + \rho g l \frac{h^2}{2} \qquad \text{(diretta verso destra)} \tag{3}$$

- **Forza esercitata dall'aria sulla parete**

$$\begin{aligned} F^{\rm aria} &= \int p_0\, dS = \int_0^h dz \int_0^l dx\, p_0 = \\ &= p_0 \underbrace{\int_0^h dz \int_0^l dx}_{=\text{area parete}} = \\ &= p_0\, lh \qquad \text{(diretta verso sinistra)} \end{aligned} \tag{4}$$

- La forza totale esercitata sulla diga è a somma (algebrica) delle due componenti

$$F^{\rm tot} = F^{\rm acqua} - F^{\rm aria} = \rho g\, l \frac{h^2}{2} \tag{5}$$

Osservazioni:

(a) Lo stesso risultato si poteva ovviamente ottenere sommando le forze *netta* dF agenti su ciascun elementino della parete

$$F^{tot} = \int dF^{tot} \tag{6}$$

dove la forza netta $dF^{tot}(z)$ è data dalla differenza tra la forza dell'acqua e quella dell'aria

$$\begin{aligned} dF^{tot} &= dF^{acqua} - dF^{aria} = \\ &= \underbrace{(p_0 + \rho g z) dS}_{\text{acqua}} - \underbrace{p_0 dS}_{\text{aria}} = \rho g z\, dS = \rho g z\, dx\, dz \end{aligned} \tag{7}$$

e cresce linearmente con la profondità z a cui si trova l'elementino dS. Sostituendo l'Eq.(7) nell'Eq.(6) e integrando si ottiene nuovamente la (5).

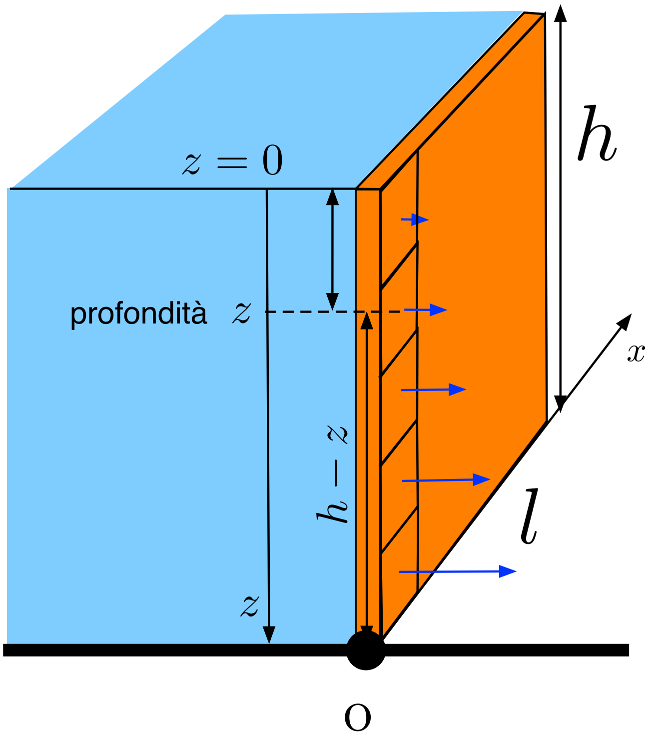
(b) la forza totale ottenuta [Eq.(5)] dipende in maniera *quadratica* dall'altezza h del volume d'acqua.

- Sostituendo i dati, e ricordando che la densità dell'acqua è

$$\rho = 10^3 \, \frac{\rm kg}{\rm m^3} \quad , \tag{8}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} F^{\rm tot} &= 10^3 \frac{\rm kg}{\cancel{\rm m^3}} \cdot 9.81 \frac{\rm m}{\rm s^2}\, 5\cancel{\rm m} \cdot \frac{9\cancel{\rm m^2}}{2} = \\ &= 221 \cdot 10^3 \underbrace{\frac{\rm kg\, m}{\rm s^2}}_{\rm N} = \\ &= 221\, {\rm kN} \end{aligned} \tag{9}$$



2. Affinché la parete rimanga fissa occorre esercitare una forza F^{ext} ed un momento M^{ext} totali esterni in modo che le condizioni di statica del corpo rigido siano soddisfatti, ossia

$$\begin{cases} F^{ext} + F^{tot} = 0 & \text{(il C.M. della parete è fermo)} \\ M_x^{ext} + M_x^{tot} = 0 & \text{(la parete non ruota attorno all'asse } x\text{)} \end{cases} \tag{10}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F^{ext} = -F^{tot} \\ M_x^{ext} = -M_x^{tot} \end{cases} \tag{11}$$

dove F^{tot} è stata determinata al punto precedente.

- Notiamo che, affinché la parete non si muova, non deve ruotare attorno ad alcun asse. In particolare non deve ruotare attorno all'asse x. Scegliendo come polo O un punto del fondale, le rotazioni attorno all'asse x sono descritte dalla componente M_x del momento totale applicato alla parete.
(Si noti che non importa a quale posizione x si ponga il polo O perché il problema è invariante lungo x e, siccome la forza netta è perpendicolare alla parete, fissato un qualunque polo O lungo la lunghezza l, il braccio che determina la componente lungo x del momento è comunque la distanza *verticale* da O e non quella orizzontale. Vedi in fondo per dettagli)

  Anche qui dobbiamo valutare un integrale

$$M_x^{tot} = \int dM_x^{tot}(z) = \int \underbrace{(h-z)}_{\text{braccio}} dF^{tot} \tag{12}$$

  Su ogni elementino dS la forza dF^{tot} *netta* è data dall'Eq.(7), e dunque il momento dM_x

infinitesimo da integrare nell'Eq.(12) vale

$$dM_x^{tot} = (h-z)\, dF^{tot} = \rho g\, z\, (h-z)\, dx dz \tag{13}$$

Nota bene: A differenza della forza dF^{tot} [Eq.(7)] che cresce linearmente al crescere della profondità z, il momento dM^{tot} non ha un andamento monotono con z: infatti per z piccoli (=vicino alla superficie) il braccio è grande ma la forza è piccola, mentre per $z \lesssim h$ (=vicino al fondo) il braccio è piccolo ma la forza è grande. Infatti il massimo valore del momento $dM(z) = (h-z)\, \rho g\, z$ si ha a metà della diga, dove si ha un giusto compromesso tra intensità della forza e braccio.

Inserendo l'Eq.(13) nell' Eq.(12) otteniamo

$$\begin{aligned} M_x^{tot} &= \int dM_x^{tot} = \\ &= \int_0^l dx \int_0^h \rho g\, z\, (h-z) \;= \\ &= l\rho g \left(\int_0^h dz\, z\, (h-z) \right) = \\ &= l\rho g \left(h\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \\ &= l\rho g h^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned} \tag{14}$$

ossia

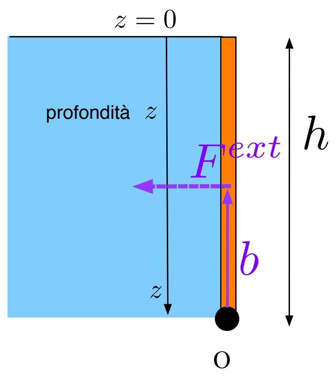
$$M_x^{tot} = \rho g l \frac{h^3}{6} \tag{15}$$

Nota bene: Il momento totale dipende in maniera *cubica* dall'altezza della diga.
Pertanto dalla seconda delle equazioni cardinali (11), il momento esterno da applicare è

$$M_x^{ext} = -M_x^{tot} \tag{16}$$

- Il momento esterno è dato dal braccio b per la forza esterna F^{ext}, dove il braccio va dal polo al punto di applicazione della forza esterna

$$M_x^{ext} = bF^{ext} \tag{17}$$



ossia

$$b \;=\; \frac{M_x^{ext}}{F_x^{ext}} = [\text{dalle Eq.(11)}] = \frac{-M_x^{tot}}{-F_x^{tot}} = \frac{M_x^{tot}}{F_x^{tot}} \tag{18}$$

Sostituendo le espressioni (5) e (15) trovate in precedenza abbiamo

$$\begin{aligned} b &= \frac{M_x^{tot}}{F^{tot}} = \frac{\rho g l \frac{h^3}{6}}{\rho g\, l \frac{h^2}{2}} \\ &= \frac{h}{3} \qquad \text{(rispetto al polo O)} \end{aligned} \tag{19}$$

Per evitare che la parete si muova, occorre applicare una forza esterna $F^{ext} = -F^{tot}$, ed occorre applicarla ad un'altezza di $h/3$ dal fondale, in modo che anche il momento si annulli.

Osservazione
Il momento $d\vec{M}^{tot}$ applicato da acqua+aria su un generico elementino è dato da

$$d\vec{M}^{tot} = \vec{r} \times d\vec{F}^{tot} \tag{20}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che va dal polo O al centro dell'elementino dS in esame. Osserviamo che la forza netta è diretta lungo l'asse y (ortogonale alla parete), mentre il vettore $\vec{r}$ si può scomporre nelle componenti $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_z$

$$\begin{cases} \vec{r} &= x\hat{u}_x - (h-z)\hat{u}_z \\ \\ d\vec{F}^{tot} &= dF^{tot}\,\hat{u}_y \end{cases} \tag{21}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} d\vec{M}^{tot} &= \vec{r} \times d\vec{F}^{tot} = \\ &= (x\hat{u}_x - (h-z)\hat{u}_z) \times dF^{tot}\,\hat{u}_y = \\ &= x\,dF^{tot}\,\underbrace{\hat{u}_x \times \hat{u}_y}_{=\hat{u}_z} - (h-z)dF^{tot}\,\underbrace{\hat{u}_z \times \hat{u}_y}_{=-\hat{u}_x} = \\ &= x\,dF^{tot}\hat{u}_z + (h-z)dF^{tot}\hat{u}_x \end{aligned} \tag{22}$$

da cui si vede che la componente x del momento è

$$dM_x^{tot} = (h-z)dF^{tot} \tag{23}$$

e dipende solo dalla componente verticale $h-z$ del vettore $\vec{r}$, come indicato nell'Eq.(12).