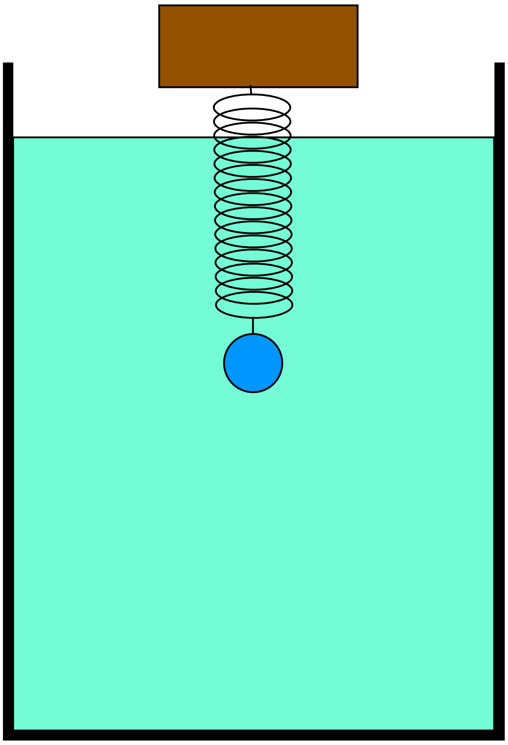
## Esercizio (tratto dall'Esempio 9.7 del Mazzoldi 2)

Una sfera di massa $m = 0.8\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 4.1\,\mathrm{cm}$ è appesa ad una molla di costante elastica $k = 125\,\mathrm{N/m}$. Se la sfera viene immersa in un liquido, si osserva che la posizione di equilibrio statico cambia di $2.0\,\mathrm{cm}$. Calcolare la densità del liquido.



**SOLUZIONE**
**Dati noti (qui li converto in unità del Sistema Internazionale):**
$m = 0.8\,\mathrm{kg}$
$R = 4.1\,\mathrm{cm}$
$k = 125\,\mathrm{N/m}$
$\Delta z_{eq} = 0.02\,\mathrm{m}$

1. Consideriamo anzitutto il caso in cui non ci sia il fluido (vedi Fig.1). In tal caso la sfera, soggetta alla forza peso, allunga la molla. La posizione di equilibrio (sfera ferma) si registra quando la forza totale che agisce sulla sfera è nulla, ossia quando la forza peso (diretta verso il basso) è compensata esattamente dalla forza elastica di richiamo della molla (diretta verso l'alto).

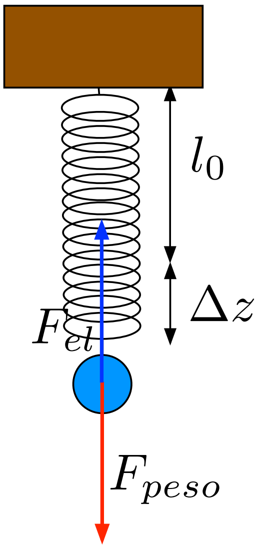



Figure 1: La sfera nel vuoto

Scegliamo l'asse $z$ diretto verso il basso (come è usuale nei problemi con i fluidi).

Indichiamo con

$$\Delta z = \text{allungamento della molla in assenza del liquido}$$

$$\text{all'equilibrio:} \quad \begin{aligned} & F_{tot} = 0 \\ & \Downarrow \\ & F_{peso} + F_{el} = 0 \\ & \Downarrow \\ & mg \; - \; k\Delta z = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

da cui otteniamo la relazione

$$mg \; = \; k\Delta z \tag{2}$$

2. Consideriamo ora il caso in cui il tutto è immerso nel liquido (vedi Fig.2). In questo caso, oltre alla forza peso e alla forza elastica, dobbiamo anche considerare la spinta di Archimede $F_A$ che agisce sulla sfera, che è diretta verso l'alto. La posizione di equilibrio si registra quando la forza totale che agisce sulla sfera è nulla

$$\text{all'equilibrio:} \qquad F_{tot} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$F_{peso} + F_{el} + F_A = 0 \tag{3}$$

dove

- La forza peso è ovviamente la stessa, indipendentemente dalla presenza del fluido

$$F_{peso} = mg$$

- L'allungamento in presenza del fluido è in generale diverso da quello in assenza del liquido, e quindi possiamo denotare

$$\Delta z' = \text{allungamento della molla in presenza del liquido}$$

  Intuitivamente ci aspettiamo che l'allungamento in presenza del liquido sia minore rispetto a quello in assenza del liquido, dato che in presenza del liquido la spinta di Archimede 'aiuta' la forza elastica a compensare la forza peso diretta verso il basso. Dunque è sufficiente un allungamento minore della molla.

- La forza di Archimede (diretta verso l'alto) è pari al peso del *liquido* spostato, ossia il peso di una fittizia sfera di liquido che occuperebbe lo spazio della sfera di materiale se quest'ultima non ci fosse:

$$F_A = -m_l\, g \tag{4}$$

  dove $m_l$ è la massa di tale sferetta fittizia di liquido.
  Se $\rho_l$ denota la densità del liquido e $V$ il volume della sfera, la massa del liquido si scrive come

$$m_l = \rho_l\, V = \rho_l \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

  e dunque

$$F_A = -\rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g \tag{5}$$

Pertanto dalla (3) abbiamo

$$mg - k\Delta z' - \rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g = 0$$
$$\text{[uso ora la (2)]}$$
$$k\Delta z - k\Delta z' - \rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g = 0$$
$$\Downarrow$$
$$k(\Delta z - \Delta z') = \rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g \tag{6}$$

da cui

$$\rho_l = \frac{k(\Delta z - \Delta z')}{\frac{4}{3}\pi R^3\, g} \tag{7}$$

Dal testo sappiamo che

$$\Delta z_{eq} = \Delta z - \Delta z' = 0.02\,\mathrm{m}$$

Pertanto, sostituendo i valori numerici, otteniamo

$$\begin{aligned} \rho_l &= \frac{125\,\frac{\mathrm{N}}{\cancel{\mathrm{m}}}\cdot 0.02\,\cancel{\mathrm{m}}}{\frac{4}{3}\pi(0.041\,\mathrm{m})^3\;\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 882.8\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4} \\ &\quad [\text{uso ora } \mathrm{N} = \mathrm{kg}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2] \\ &= 882.8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned} \tag{8}$$

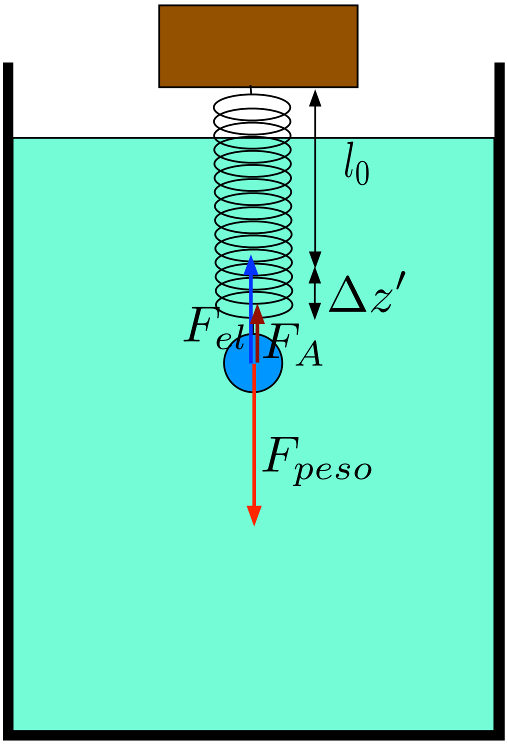



Figure 2: La sfera immersa nel liquido