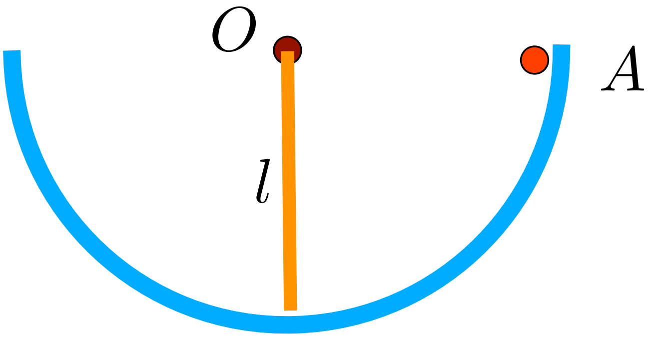
Esercizio

Una sferetta di massa m viene lanciata dal punto A di una guida semicircolare liscia di raggio l e va a colpire un'asta omogenea di lunghezza l e massa $M = 2m$ appesa senza attriti nel centro O della guida. Ricavare l'espressione della velocità v_A con cui dev'essere lanciata la sferetta affinché l'asta, per effetto dell'urto elastico, si porti, fermandosi, in posizione verticale simmetrica rispetto a quella di partenza



SOLUZIONE

1. **Moto della pallina prima dell'urto**
Consideriamo anzitutto il tratto di moto della pallina dal punto iniziale A al punto B in fondo alla guida. Sulla pallina agiscono le seguenti forze:

-forza peso $\rightarrow$ conservativa

-reazione vincolare della guida $\rightarrow$ non entra nel bilancio energetico perché non compie lavoro. Infatti, istante per istante, $\vec{N}$ è diretta radialmente mentre lo spostamento $d\vec{s}$ della pallina è tangente alla guida, quindi il prodotto scalare è nullo ($\vec{N} \cdot d\vec{s} = 0$ perché $\vec{N} \perp d\vec{s}$));

Pertanto l'energia meccanica si conserva e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E_m^A &= E_m^B \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + mgl &= \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 \end{aligned} \tag{1}$$

da cui

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gl} \tag{2}$$

2. **Urto**

- **Il sistema pallina+asta è isolato?**

  No, perché su di esso agiscono 3 forze esterne: peso, reazione vincolare della guida, reazione vincolare del perno a cui è fissata l'asta. Pertanto

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_j \vec{F}^{\text{ext}} \neq 0 \tag{3}$$

  e quindi la quantità di moto totale $\vec{P}$ NON si conserva nel tempo, ossia varia.

- **Le forze esterne sono impulsive?**
  -La forza peso non è impulsiva;
  -La reazione vincolare della guida è un'incognita. Sapendo che la pallina rimbalza indietro con una velocità v' possiamo dedurre che è discontinua nel tempo, ma non impulsiva. E comunque, all'istante dell'urto, è diretta verticalmente, per cui non incide sulla conservazione della quantità di moto lungo x;
  -La reazione vincolare del perno è incognita e molto probabilmente è impulsiva con una componente lungo x.

  Pertanto non possiamo escludere che le forze esterne siano impulsive (anzi, abbiamo il forte sospetto che la reazione vincolare del perno lo sia). Non possiamo esprimerci sulla conservazione della quantità di moto totale $\vec{P}$ del sistema pallina+asta attraverso l'urto.

- **Guardiamo al momento angolare totale del sistema**
  Il momento angolare totale varia secondo la legge

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \vec{M}^{\mathrm{ext}} \neq 0 \tag{4}$$

Osserviamo che, se scegliamo come polo il perno O, il momento $\vec{M}_{\mathrm{perno}}$ della reazione vincolare del perno stesso è nullo (sempre, ad ogni instante). Inoltre, all'istante t_u dell'urto, sia la forza peso che la reazione vincolare $\vec{N}$ della guida sono dirette verticalmente (ossia antiparallele al vettore che va da O a B), e dunque il loro momento è nullo ($\vec{M}_N = \vec{M}_{peso} = 0$). Quindi abbiamo

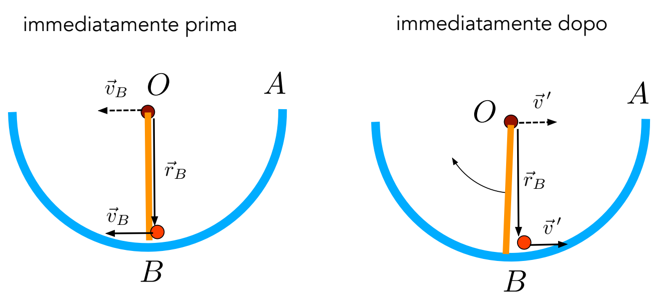
$$\frac{d\vec{L}}{dt}(t_u) = 0 \qquad\qquad \underbrace{\vec{L}(t_u - \epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente}\\ \text{prima}}} = \underbrace{\vec{L}(t_u + \epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente}\\ \text{dopo}}} \tag{5}$$

Pertanto il momento angolare (rispetto al polo O) si conserva attraverso l'urto. Guardando la figura possiamo determinare le espressioni dei due momenti angolari totali immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto.

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{prima} &= \vec{L}^{pallina}_{prima} + \vec{L}^{asta}_{prima} = \\
&= \vec{r}_B \times m\vec{v}_B \;+\; 0 \\
&\quad \text{[per calcolare il momento angolare trasporto prima i due} \\
&\quad \text{ vettori in modo che abbiano la coda nello stesso punto]} \\
&= |\vec{r}_B| m |\vec{v}_B| \sin(\pi/2) \hat{k} = \\
&= l m v_B \hat{k}
\end{aligned} \tag{6}$$

dove

$$\hat{k} = \text{versore entrante} \tag{7}$$



Analogamente

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{dopo} &= \vec{L}^{pallina}_{dopo} + \vec{L}^{asta}_{dopo} = \\
&= \vec{r}_B \times m\vec{v}' \;+\; I_O\,\omega_B \hat{k} \\
&\quad \text{[per calcolare il momento angolare trasporto prima i due} \\
&\quad \text{ vettori in modo che abbiano la coda nello stesso punto]} \\
&= -|\vec{r}_B| m |\vec{v}'| \sin(\pi/2) \hat{k} + \; I_O\,\omega_B \hat{k} = \\
&= -l m v' \hat{k} + \; I_O\,\omega_B \hat{k}
\end{aligned} \tag{8}$$

dove I_O è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse passante per il suo estremo O e perpendicolare al foglio.

$$I_O = \frac{Ml^2}{3} \tag{9}$$

Uguagliando le Eq.(6) e (8) si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{L}_{prima} &= \vec{L}_{dopo} \\ &\Downarrow \\ lmv_B\hat{k} &= \left(-lmv' + \; I_O\,\omega_B\right)\hat{k} \\ lmv_B &= -lmv' + \; I_O\,\omega_B \end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{v' = \frac{I_O\omega_B}{ml} - v_B} \tag{10}$$

- **Sfruttiamo ora il fatto che l'urto è elastico**
  Pertanto l'energia si conserva attraverso l'urto

$$\begin{aligned} E_{prima} &= E_{dopo} \\ \frac{1}{2}mv_B^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I_O\omega_B^2 \end{aligned} \tag{11}$$

ossia, semplificando per $m/2$

$$\boxed{v_B^2 = v'^2 + \frac{I_O}{m}\,\omega_B^2} \tag{12}$$

Abbiamo pertanto un sistema di due equazioni (10) e (12) per le due variabili v' e ω_B, che possiamo risolvere sostituendo la (10) nella (12)

$$\begin{aligned} v_B^2 &= v'^2 + \frac{I_O}{m}\,\omega_B^2 \\ &\Downarrow \\ v_B^2 &= \left(\frac{I_O\omega_B}{ml} - v_B\right)^2 + \frac{I_O}{m}\,\omega_B^2 \\ &\Downarrow \\ v_B^2 &= \frac{I_O^2\omega_B^2}{m^2l^2} + v_B^2 - \frac{2I_O\omega_B\,v_B}{ml} + \frac{I_O}{m}\,\omega_B^2 \\ &\Downarrow \\ 0 &= \frac{I_O^2\omega_B^2}{m^2l^2} - \frac{2I_O\omega_B\,v_B}{ml} + \frac{I_O}{m}\,\omega_B^2 \\ &\Downarrow \text{[raccolgo } I_O\omega_B/m\text{]} \\ 0 &= \frac{I_O\omega_B}{m}\left(\frac{I_O\omega_B}{ml^2} - \frac{2\,v_B}{l} + \omega_B\right) \\ &\Downarrow \qquad\qquad (13) \\ \frac{2\,v_B}{l} &= \left(\frac{I_O}{ml^2} + 1\right)\omega_B \qquad (14) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\omega_B = \frac{2\,v_B}{l\left(\frac{I_O}{ml^2} + 1\right)} \tag{15}$$

Ricordando l'Eq.(9) e che $M = 2m$ si ha

$$\frac{I_O}{ml^2} + 1 = \frac{\frac{Ml^2}{3}}{ml^2} + 1 = \frac{\frac{2m}{3}}{m} + 1 = \frac{5}{3} \tag{16}$$

la velocità angolare (15) diventa

$$\omega_B = \frac{2\,v_B}{l\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}\frac{v_B}{l} \tag{17}$$

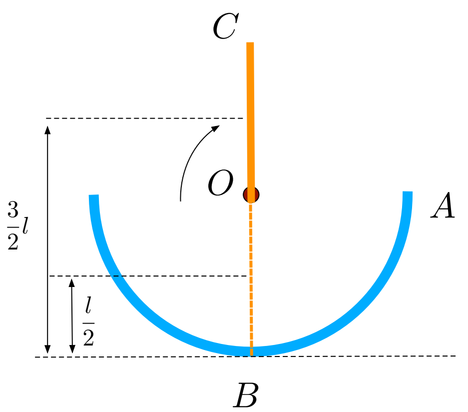
- D'altra parte sappiamo che v_B è legato alla velocità iniziale v_A di lancio della pallina tramite $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gl}$ [vedi Eq.(2)] e dunque possiamo anche scrivere

$$\omega_B = \frac{6}{5}\frac{\sqrt{v_A^2 + 2gl}}{l} \tag{18}$$

3. **Moto dopo l'urto**
Dopo l'urto l'asta ruota soggetta alle seguenti forze:

-forza peso → conservativa;

-reazione vincolare del perno → non fa lavoro (il perno è fisso) e dunque non entra nel bilancio energetico.



Pertanto l'energia meccanica dell'asta si conserva

$$\begin{aligned}
E_m^B &= E_m^C \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2}I_O\omega_B^2 + Mg\frac{l}{2} &= 0 + Mg\frac{3l}{2} \qquad (19)\\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2}I_O\omega_B^2 &= Mgl \\
&\Downarrow \quad [\text{uso } I_O = \tfrac{Ml^2}{3} = \tfrac{2ml^2}{3} \text{ e } M = 2m] \\
\frac{1}{2}\frac{2ml^2}{3}\omega_B^2 &= 2mgl \\
&\Downarrow \quad [\text{semplifico per } ml\,] \\
\frac{l}{3}\omega_B^2 &= 2g \qquad (20)
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\omega_B^2 = \frac{6g}{l} \tag{21}$$

Sostituendo la (18) nella (21) otteniamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6}{5}\frac{\sqrt{v_A^2 + 2gl}}{l}\right)^2 &= \frac{6g}{l} \\
&\Downarrow \\
\frac{36}{25}\frac{v_A^2 + 2gl}{l^2} &= \frac{6g}{l} \\
&\Downarrow \\
v_A^2 + 2gl &= \frac{25}{36} \cdot 6gl \\
&\Downarrow \\
v_A^2 &= (\frac{25}{6} - 2)\, gl
\end{aligned} \tag{22}$$

da cui

$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{13}{6}\, gl}} \tag{23}$$