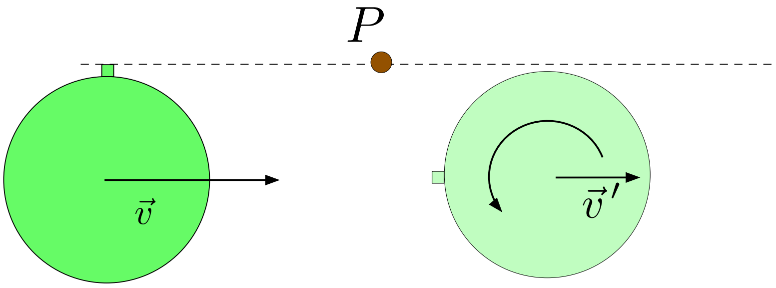
Esercizio (tratto dal Problema 6.31 del Mazzoldi-Nigro-Voci)
Un disco di massa m e raggio R scivola senza attrito su un piano orizzontale con velocità $\vec{v}$ lungo x. Ad un certo istante un dentino (di dimensioni trascurabili) posto sul bordo del disco urta contro un perno fisso P che si trova nel piano. Supponendo l'urto elastico, calcolare la velocità $\vec{v}'$ di traslazione e la velocità angolare ω' immediatamente dopo l'urto.



SOLUZIONE

- Anzitutto mi chiedo se il sistema di punti materiali 'disco' è isolato. La risposta è NO, dato che il perno P, nell'urto, esercita una forza sul disco. Pertanto, a priori, non ho garanzia che si conservino la quantità di moto $\vec{P}$ e il momento angolare $\vec{L}$ del disco.

- In seconda battuta mi chiedo se la quantità di moto e il momento angolare si conservino almeno attraverso l'urto (=non subiscano salti bruschi nell'urto). Questo dipende da se la forza esterna ed il momento della forza esterna sono impulsivi o no.

  - La forza esterna (forza del perno) è una forza impulsiva: anche se ci è ignota, sappiamo che si esercita per un brevissimo intervallo temporale (l'urto) ed è intensa. Pertanto la quantità di moto $\vec{P}$ del disco subisce un salto nel tempo e NON si conserva nemmeno attraverso l'urto;
  - Il momento della forza esterna del perno: osservo che, se scelgo il perno P come polo, il momento $\vec{M}^e$ della forza esterna del perno è nullo, in quanto tale forza è applicata proprio al polo P. Pertanto la quantità di moto $\vec{L}$ (calcolata sempre rispetto al polo P) si conserva nel tempo

    $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L} = \text{constante} \tag{1}$$

    e dunque in particolare si conserva attraverso l'urto, ossia

    $$\vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \qquad \text{(calcolati rispetto a P)} \tag{2}$$

    Osservo anche che, dato che il moto avviene lungo il piano, il momento angolare $\vec{L}$ è ortogonale al piano del foglio, ossia è diretto lungo z.

- Per calcolare il momento angolare rispetto al polo P (sia prima che dopo l'urto), uso il teorema di König sul momento angolare, che esprime il momento angolare del corpo rigido rispetto ad un polo P in termini del momento angolare rispetto al centro di massa:

  $$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM} \; + \; \underbrace{\vec{L}\Big|_{C.M.}}_{=I\omega\hat{u}_z} \tag{3}$$

  dove $\vec{r}_{CM}$ e $\vec{v}_{CM}$ sono la posizione e la velocità del C.M. del disco rispetto al polo P, e

  $$I = \frac{1}{2}mR^2 \tag{4}$$

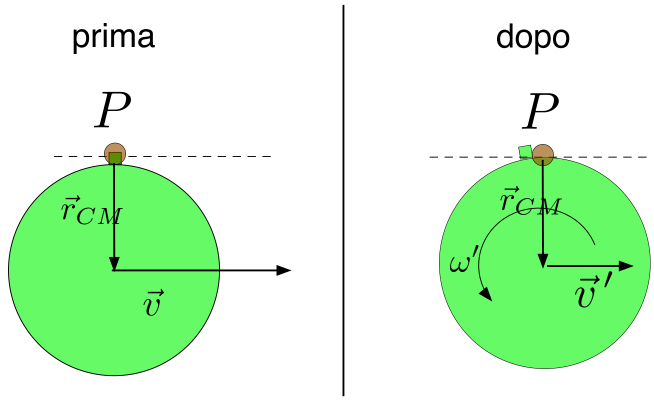
  è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse che passa per il centro di massa.

  Dunque dalla (2) abbiamo

  $$\begin{array}{rcl} \vec{L}_{prima} & = & \vec{L}_{dopo} \\ & \Downarrow & \\ R\,mv\,\hat{u}_z + \underbrace{0}_{\substack{\text{no rotaz.} \\ \text{prima}}} & = & R\,mv'\,\hat{u}_z + \underbrace{I\omega'\,\hat{u}_z}_{\substack{\text{rotaz.} \\ \text{dopo}}} \end{array} \tag{5}$$

  Usando la (4) nella (5) e semplificando otteniamo

  $$v - v' = \frac{1}{2}R\omega' \tag{6}$$



- Dobbiamo ora sfruttare l'informazione che l'urto è elastico (l'energia si conserva). Applicando il teorema di König dell'energia, che esprime l'energia cinetica del corpo rigido rispetto ad un polo P in termini dell'energia cinetica rispetto al centro di massa del corpo rigido

$$E_K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{CM}^2 + \underbrace{E_K|_{C.M.}}_{=\frac{1}{2}I\omega^2} \tag{7}$$

dalla conservazione dell'energia otteniamo

$$\begin{aligned} E_{K,prima} &= E_{K,dopo} \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{0}_{\text{no rotaz. prima}} &= \frac{1}{2}mv'^2 + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega'^2}_{\text{cin. rotaz. dopo}} \end{aligned} \tag{8}$$

Usando la (4) nella (8) e semplificando otteniamo

$$v^2 - v'^2 = \frac{1}{2}R^2\omega'^2 \tag{9}$$

- Le due equazioni (6) e (9)

$$\begin{cases} v - v' &= \frac{1}{2}R\omega' \\ v^2 - v'^2 &= \frac{1}{2}R^2\omega'^2 \end{cases} \tag{10}$$

costituiscono un sistema di due equazioni per le due incognite v' e ω'. Per risolvere il sistema portiamo ai membri sinistri tutto ciò che riguarda v'

$$\begin{cases} v' &= v - \frac{1}{2}R\omega' \\ v'^2 &= v^2 - \frac{1}{2}R^2\omega'^2 \end{cases} \tag{11}$$

Prendendo il quadrato della prima equazione ed uguagliandolo alla seconda

$$\begin{aligned} \left(v - \frac{1}{2}R\omega'\right)^2 &= v^2 - \frac{1}{2}R^2\omega'^2 \\ &\Downarrow \\ v^2 - Rv\,\omega' + \frac{1}{4}R^2\omega'^2 &= v^2 - \frac{1}{2}R^2\omega'^2 \\ &\Downarrow \\ \frac{3}{4}R^2\omega'^2 &= Rv\,\omega' \end{aligned} \tag{12}$$

da cui

$$\boxed{\omega' = \frac{4v}{3R}} \tag{13}$$

Sostituendo ora la (15) nella prima equazione del sistema (11) otteniamo

$$v' = v - \frac{1}{2}R \cdot \frac{4v}{3R} \tag{14}$$

ossia

$$\boxed{v' = \frac{v}{3}} \tag{15}$$