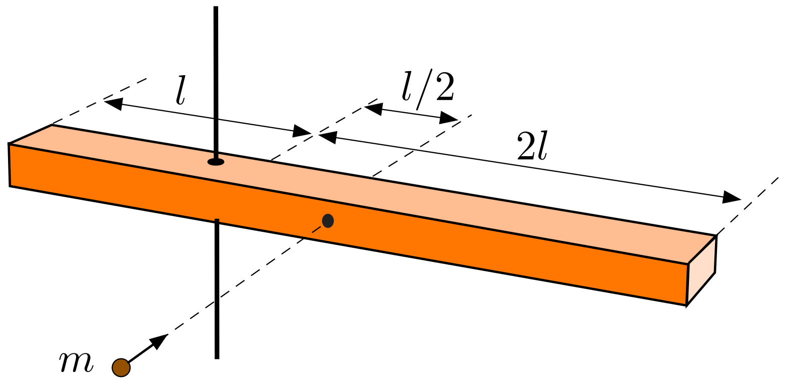
Esercizio (tratto dal Problema 6.42 del Mazzoldi-Nigro-Voci)
Un'asta rigida è incernierata ad un asse verticale attorno al quale può ruotare. Una particella, di massa $m = 0.1\,\text{Kg}$ e velocità $v_1 = 50\,\text{m/s}$ ortogonale all'asta, colpisce l'asta e rimbalza nella stessa direzione da cui è arrivata, con velocità $v_2 = 10\,\text{m/s}$ e verso opposto. La massa dell'asta è $M = 1\,\text{Kg}$, e le distanze sono indicate in figura, dove $l = 1\,\text{m}$. Il moto della particella e dell'asta avviene in un piano orizzontale.

1. Calcolare l'impulso subito dall'asse nell'urto

Alla rotazione dell'asta si oppone un momento $M = -\kappa\theta$, dove θ è l'angolo di rotazione rispetto alla posizione di equilibrio in cui si trova l'asta all'istante dell'urto. Il periodo delle oscillazioni di torsione dell'asta vale $T = 13.14\,\text{s}$.

2. Calcolare l'angolo massimo raggiunto dall'asta dopo l'urto



SOLUZIONE

1. Consideriamo anzitutto la fase dell'urto

   - Anzitutto mi chiedo se il sistema di punti materiali 'asta+particella' sia isolato. La risposta è NO, dato che l'asta è incernierata all'asse verticale e quest'ultimo, nell'urto, esercita una forza sull'asta. Pertanto, a priori, non ho garanzia che si conservino la quantità di moto $\vec{P}$ e il momento angolare $\vec{L}$ del disco.
   - Mi chiedo allora se la quantità di moto si conservi almeno attraverso l'urto (=se non subisca salti bruschi nell'urto). La forza esterna del perno dell'asse è però una forza impulsiva: anche se ci è ignota, sappiamo che si esercita per un brevissimo intervallo temporale (l'urto) ed è intensa. Pertanto la quantità di moto $\vec{P}$ del disco subisce un salto nel tempo e NON si conserva nemmeno attraverso l'urto;
   - Mi chiedo allora se il momento angolare si conservi attraverso l'urto. Scelgo come polo il punto in cui è incernierata l'asta. Dal testo sappiamo che il perno dell'asse applica un momento esterno $M = -k\theta$ che in generale è diverso da zero, dunque $\vec{L}$ NON si conserva nel tempo:

     $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e = -\kappa\theta\,\hat{u}_z \neq 0 \qquad \Rightarrow \vec{L} \text{ non è costante nel tempo}$$

     Tuttavia, all'istante dell'urto, l'angolo di rotazione dell'asta vale $\theta = 0$, e dunque tale momento è nullo all'urto. Ciò significa che il momento angolare $\vec{L}$ si conserva attraverso l'urto:

     $$\vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \qquad \Rightarrow \vec{L} \text{ si conserva attraverso l'urto} \tag{1}$$

   - Osservo anche che, dato che il moto avviene lungo il piano, il momento angolare $\vec{L}$ è diretto lungo z. Inoltre il momento angolare totale rispetto al perno dell'asse (sia prima che dopo l'urto) è dato da

     $$\vec{L} = \vec{L}^{punto} + \vec{L}^{asta} \tag{2}$$

     Applicando la (1) abbiamo

     $$\begin{aligned} \vec{L}_{prima} &= \vec{L}_{dopo} \\ &\Downarrow \\ \underbrace{mv_1 \frac{l}{2}\hat{u}_z}_{\text{punto}} + \underbrace{0}_{\text{asta (no rotaz. prima)}} &= \underbrace{-mv_2 \frac{l}{2}\hat{u}_z}_{\text{punto}} + \underbrace{I\omega_a\,\hat{u}_z}_{\text{rotaz. dopo}} \end{aligned} \tag{3}$$

     dove:

     (a) ω_a è la velocità angolare dell'asta attorno al perno immediatamente dopo l'urto;

     (b) I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse verticale passante per il perno. Esso è legato al momento d'inerzia rispetto al centro dell'asta tramite il teorema di Huygens-Steiner

     $$I = \underbrace{\frac{1}{12}M(3l)^2}_{I \text{ rispetto al centro}} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = Ml^2 \tag{4}$$

     Sostituendo la (4) nell'Eq.(3) abbiamo

     $$\omega_a = \frac{v_1 + v_2}{2l}\frac{m}{M} \tag{5}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{50\frac{\cancel{m}}{s} + 10\frac{\cancel{m}}{s}}{2 \cdot 1\,\cancel{m}} \frac{0.1\,\mathrm{K}\cancel{g}}{1\,\mathrm{K}\cancel{g}} = \\ &= 3\,\mathrm{s}^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

- L'impulso subito dall'asse è dato da

$$\Delta P = P_{dopo} - P_{prima} \tag{7}$$

dove tutte queste quantità di moto sono dirette lungo la direzione di incidenza del punto materiale. Esplicitamente

$$\begin{aligned} \Delta P &= P^{punto}_{dopo} + P^{asta}_{dopo} - \left(P^{punto}_{prima} + P^{asta}_{dopo}\right) = \\ &= -mv_2 + Mv_{CM} - (mv_1 + 0) = \\ & \qquad\qquad\qquad [\text{osservo che il C.M. si trova a distanza } l/2 \text{ dal perno}] \\ &= -mv_2 + M\omega_a \frac{l}{2} - mv_1 = \\ &= -m(v_1 + v_2) + M\omega_a \frac{l}{2} = \qquad\qquad [\text{uso (5)}] \\ &= -m(v_1 + v_2) + \cancel{M} \cdot \frac{v_1 + v_2}{2l} \frac{m}{\cancel{M}} \frac{l}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

ossia

$$\Delta P = -\frac{3}{4} m(v_1 + v_2) \tag{9}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} \Delta P &= -\frac{3}{4} 0.1\,\mathrm{Kg} \cdot (50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) = \\ &= -4.5\,\mathrm{Kg\,ms}^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

2. Consideriamo ora il moto rotatorio dell'asta dopo l'urto. Esso è governato dall'equazione

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \underbrace{-\kappa\theta\,\hat{u}_z}_{=\vec{M}^e} \qquad\qquad [\vec{L} = I\omega\hat{u}_z] \\ & \Downarrow \\ I\frac{d\omega}{dt} &= -\kappa\,\theta \end{aligned} \tag{11}$$

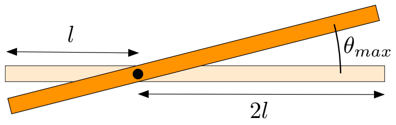
ossia

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\,\theta} \tag{12}$$

con

$$\text{condizioni iniziali} \quad \begin{cases} \text{posizione angolare iniziale } \theta(t=0) = 0; \\ \\ \text{velocità angolare iniziale è } \omega(t=0) = \omega_a \end{cases} \tag{13}$$

Per determinare l'angolo massimo possiamo procedere in due modi:



3. **PRIMO MODO**
Osservo che l'Eq.(12) non è altro che l'equazione di un oscillatore armonico, con pulsazione e periodo dati da

$$\Omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad\qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{14}$$

Pertanto la soluzione dell'Eq.(12) è ben nota ed è

$$\theta(t) = A\sin(\Omega t + \varphi) \tag{15}$$
$$\omega(t) = A\Omega\cos(\Omega t + \varphi) \tag{16}$$

dove le costanti A e φ si ricavano dalle condizioni iniziali (13)

$$\begin{cases} \theta(t=0) = A\sin\varphi = 0; & \Rightarrow \varphi = 0 \\ \\ \omega(t=0) = A\Omega\cos\varphi = \omega_a & \Rightarrow A = \frac{\omega_a}{\Omega} \end{cases} \tag{17}$$

e dunque la soluzione (18) è esplicitamente

$$\theta(t) = \frac{\omega_a}{\Omega}\sin(\Omega t) \tag{18}$$

Dalla soluzione (18) si vede subito che l'angolo massimo è dato da

$$\theta_{max} = \frac{\omega_a}{\Omega} = \frac{\omega_a T}{2\pi} \tag{19}$$

Sostituendo i valori [usando anche la (6)]

$$\theta_{max} = \frac{3\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 13.14\,\mathrm{s}}{2\pi} = 6.27 \tag{20}$$

4. **SECONDO MODO**
Il moto dell'oscillatore armonico conserva l'energia meccanica

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\kappa\,\theta^2}_{\text{potenziale}} \tag{21}$$

dove il secondo termine a destra corrisponde all'energia potenziale di torsione.

Energia potenziale di torsione: Da dove si vede? Considerando che in corrispondenza dell'angolo $\theta = 0$ l'asta si trova in equilibrio, si può assumere tale configurazione come quella di riferimento. L'energia potenziale corrispondente alla configurazione dell'asta ruotata di un certo angolo θ è data da (meno) il lavoro $W^{0\to\theta}$ per far ruotare l'asta dalla configurazione di riferimento $\theta = 0$ alla configurazione corrispondente all'angolo θ. A sua volta il lavoro delle forze esterne su un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso è data dall'integrale del momento esterno sull'angolo di rotazione. Pertanto abbiamo:

$$\begin{aligned} E_p(\theta) &= -W^{0\to\theta} = -\int_0^\theta M^{ext}(\theta')\,d\theta' = \\ &= -\int_0^\theta (-\kappa\theta')\,d\theta' = \\ &= \kappa\int_0^\theta \theta'\,d\theta' = \\ &= \frac{1}{2}\kappa\,\theta^2 \end{aligned} \tag{22}$$

ed è di fatto molto simile all'energia potenzaile delle forza elastica.

Considerando l'istante immediatamente dopo l'urto come istante iniziale e l'istante in cui l'asta raggiunge l'angolo massimo come istante finale, dalla conservazione dell'energia meccanica abbiamo

$$\begin{aligned} E_m^{in} &= E_m^{fin} \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}I\omega_a^2 + 0 &= 0 + \frac{1}{2}\kappa\theta_{max}^2 \\ &\Downarrow \\ \frac{I}{\kappa}\omega_a^2 &= \theta_{max}^2 \end{aligned} \tag{23}$$

da cui

$$\theta_{max} = \sqrt{\frac{I}{\kappa}}\,\omega_a \tag{24}$$

Ricordando la (14), possiamo esprimerla come

$$\theta_{max} = \frac{\omega_a}{\Omega} = \frac{\omega_a T}{2\pi} \tag{25}$$

che è esattamente l'Eq.(19) ottenuta col primo modo.