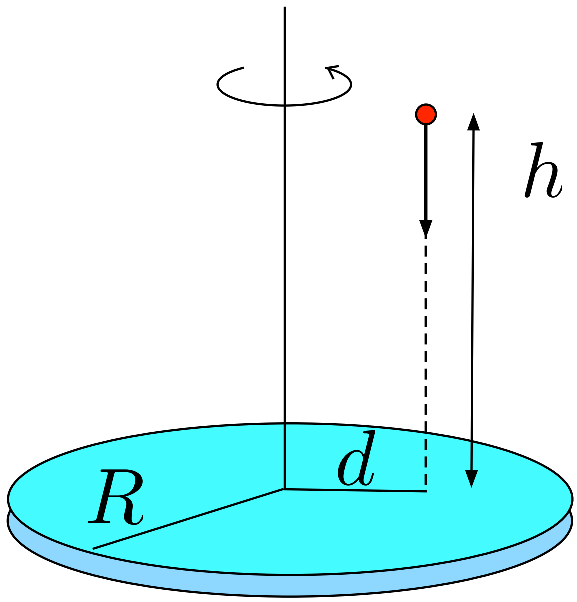
Esercizio (tratto dall'esempio 6.22 p.189 del Mazzoldi)

Un disco di massa M e raggio R ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale che passa per il centro del disco e che è tenuto fisso da un perno. Da un'altezza h viene lasciato cadere sul disco un punto materiale di massa m. Il punto urta il disco ad una distanza $d < R$ dal centro del disco e vi rimane attaccato. Determinare:

1. la velocità angolare del sistema nell'istante successivo all'urto;
2. l'impulso della reazione vincolare;
3. l'impulso angolare della reazione vincolare.



SOLUZIONE

1. • Ci chiediamo innanzitutto se il sistema disco+particella sia isolato. La risposta è NO, dato che, oltre alle forze *interne* tra disco e particella che si esercitano all'istante dell'urto e che causano l'attaccarsi della particella al disco, esistono altre due forze *esterne* al sistema disco+particella:

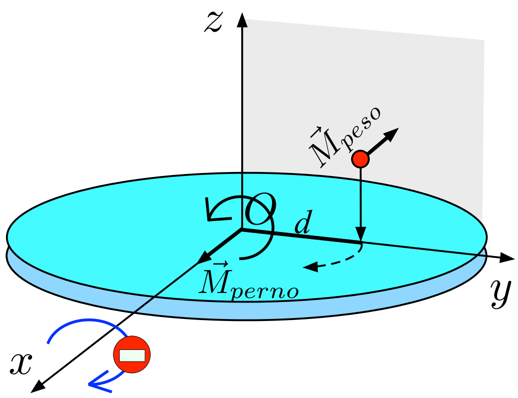
   - **la forza peso** che si esercita sulla particella fino a quando essa non si attacca al disco (dopo è di fatto inattiva, essendo cancellata dal piano del disco stesso);

   - **la reazione vincolare del perno** che agisce sul disco per mantenere fisso sia il suo centro che il suo asse di rotazione.

   Siccome il sistema non è isolato, non abbiamo garanzia che la quantità di moto totale $\vec{P}$ ed il momento angolare totale $\vec{L}$ si conservino nel tempo. Anzi, come vedremo, NON si conservano né l'uno né l'altro.

   • Dato che $\vec{P}$ e $\vec{L}$ sono dei *vettori* a tre componenti, possiamo cercare di capire se almeno *alcune delle componenti* di tali vettori si conservino. Tali leggi di conservazione ci potrebbero forse permettere di risolvere il problema. A tale scopo è utile analizzare le forze ed i momenti esterni che agiscono sul sistema.

   • Indichiamo con z l'asse del disco e con $y - z$ il piano identificato dall'asse del disco e dalla verticale di caduta della particella, e con x l'asse perpendicolare a tale piano e giacente sul piano del disco. Consideriamo come polo O il centro del disco e valutiamo rispetto a tale polo il momento delle forze esterne descritte sopra



   (a) *Peso*. Essendo la forza peso diretta lungo z, il momento $\vec{M}_{peso}$ è diretto lungo l'asse x;

   $$\vec{M}_{peso} = -mg\,d\,\hat{u}_x \tag{1}$$

   dove $\hat{u}_x$ indica il versore lungo x, e d è il braccio della forza peso.

   NOTA BENE: Essendo la forza peso una forza costante nel tempo, anche il suo momento $\vec{M}_{peso}$ è costante nel tempo. Pertanto, non è un momento impulsivo e NON fa variare $\vec{L}$ in modo brusco (= con discontinuità).

(b) *Perno.* Osserviamo che il perno svolge due azioni:

- mantiene fermo il *centro* del disco al momento dell'urto. Questo significa che il perno esercita una *forza* (=la reazione vincolare $\vec{R}$) che impedisce al *centro di massa* del disco di spostarsi quando la pallina lo urta;
- mantiene fisso l'*asse* di rotazione del disco. Si noti che non è equivalente al punto precedente, perché anche se il centro del disco rimane fermo al momento dell'urto, l'asse di rotazione potrebbe ancora ruotare sul piano $y-z$. Il punto materiale, urtando il disco, tenderebbe a fare ruotare il disco attorno all'asse x, ossia a spostare il suo asse di rotazione sul piano $y-z$. Il fatto che l'asse rimanga fisso lungo z significa che invece all'istante dell'urto il perno esercita anche un *momento* vincolare che impedisce al punto materiale di far ruotare il disco su tale piano (ossia attorno all'asse x).

  NOTA BENE: Il momento vincolare del perno è un'incognita. L'unica cosa che possiamo dire con certezza è che, siccome contrasta la rotazione sul piano $y-z$ che la forza peso cerca di apportare, $\vec{M}_{perno}$ è diretto lungo x, ossia

  $$\vec{M}_{perno} = M_{perno}\,\hat{u}_x \tag{2}$$

  dove $\hat{u}_x$ indica sempre il versore lungo x. Ragionevolmente possiamo affermare che, una volta che l'urto è avvenuto e che il punto materiale è rimasto incollato al disco, $\vec{M}_{perno}$ vale $+mg\,d\,\hat{u}_x$ in modo da uguagliare e annullare il momento (1) esercitato dalla forza peso. Ma durante il breve intervallo di tempo dell'urto il valore di $\vec{M}_{perno}$, che sarà ragionevolmente molto intenso (momento impulsivo), ci è ignoto. Ciò che però ci interessa è che è diretto lungo x.

Pertanto abbiamo che il momento angolare totale del sistema disco+particella varia secondo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} = \underbrace{\vec{M}_{peso}}_{\text{cost}} + \underbrace{\vec{M}_{perno}}_{\text{impulsivo}} = (-mg\,d + M_{perno})\,\hat{u}_x \neq 0 \tag{3}$$

e ritroviamo appunto che il momento angolare $\vec{L}$ non si conserva, né nel tempo (a causa di $\vec{M}_{peso}$ e di $\vec{M}_{perno}$), né attraverso l'urto (a causa di $\vec{M}_{perno}$ che è un momento impulsivo).

- Tuttavia, osservando che $\vec{M}_{peso}$ e $\vec{M}_{perno}$ sono diretti lungo x [vedi Eq.(1) e (2)], in realtà nell'Eq.(3) è solo la componente L_x del momento angolare a non conservarsi. Scrivendo l'Eq.(3) in componenti $\vec{L} = L_x \hat{u}_x + L_y \hat{\jmath} + L_z \hat{k}$, abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dfrac{dL_x}{dt} & = & \underbrace{M_{peso}}_{\text{cost}} + \underbrace{M_{perno}}_{\text{impulsivo}} \neq 0 & \Rightarrow \quad L_x \text{ varia nel tempo con discontinuità} \\ \dfrac{dL_y}{dt} & = & 0 & \Rightarrow \quad L_y = \text{cost} \\ \dfrac{dL_z}{dt} & = & 0 & \Rightarrow \quad L_z = \text{cost} \end{array} \right. \tag{4}$$

Dunque, anche se il momento angolare come vettore non si conserva né nel tempo né attraverso l'urto, le componenti L_y e L_z si conservano nel tempo che attraverso l'urto. In particolare L_z si conserva allora anche attraverso l'urto, ossia

$$L_{z,prima} = L_{z,dopo} \tag{5}$$

e possiamo sfruttare questa proprietà.

- Prima dell'urto la componente L_z è data solamente dalla rotazione del disco, dato che la particella ha momento angolare solo lungo L_x.

$$L_{z,prima} = I_D\, \omega \tag{6}$$

Dopo l'urto il disco ruoterà con una nuova velocità angolare ω'; la particella si attacca al disco e dunque ruoterà solidalmente con esso, contribuendo ad aumentarne il momento d'inerzia. Per cui

$$L_{z,dopo} = (I_D + md^2)\, \omega' \tag{7}$$

Inserendo (6) e (6) in (5) otteniamo

$$\begin{aligned} I_D\, \omega &= (I_D + md^2)\, \omega' \\ &\Downarrow \\ \omega' &= \omega \frac{I_D}{I_D + md^2} = \omega \frac{1}{1 + \frac{md^2}{I_D}} \end{aligned} \tag{8}$$

Ricordando che il momento d'inerzia di un disco che ruota torno al suo asse vale

$$I_D = \frac{1}{2} M R^2 \tag{9}$$

otteniamo

$$\omega' = \omega \frac{1}{1 + 2 \frac{m}{M} \frac{d^2}{R^2}} \tag{10}$$

2. Dato che la quantità di moto non si conserva attraverso l'urto, abbiamo

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima} \tag{11}$$

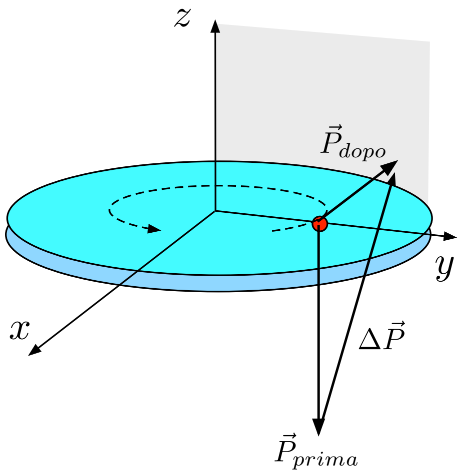
Questa variazione viene assorbita dal perno, e costituisce appunto l'impulso della reazione vincolare durante l'urto. Osserviamo che

- la quantità di moto del disco è sempre nulla, sia prima che dopo l'urto: nel disco ad ogni istante per ciascun elementino δm che ha una velocità $\vec{v}$ ce n'è un altro simmetrico rispetto all'asse che ha velocità $-\vec{v}$. Infatti il centro di massa del disco è fermo.

- Dunque la quantità di moto, sia prima che dopo l'urto, è dovuta alla sola particella. In particolare
  - prima dell'urto la quantità di moto della particella è diretta lungo z e verso il basso. Indicando con v_p il modulo della velocità immediatamente prima dell'urto abbiamo
$$\vec{P}_{prima} = -mv_p \vec{k} \tag{12}$$
    dove $\hat{k}$ è il versore lungo l'asse z verso l'alto.
  - dopo l'urto la particella rimane attaccata al disco, e dunque la sua velocità $\vec{v}'$ giace sul piano $x-y$ ed è diretta tangenzialmente lungo la circonferenza di rotazione di raggio d. In particolare, immediatamente dopo l'urto, la velocità è diretta lungo $-\hat{u}_x$
$$\vec{P}_{dopo} = -m\omega' d \; \hat{u}_x \tag{13}$$

- Pertanto i vettori quantità di moto $\vec{P}_{prima}$ e $\vec{P}_{prima}$ sono ortogonali tra loro, ed abbiamo
$$\begin{aligned} |\Delta\vec{P}| &= |\vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima}| = \\ &= \sqrt{|\vec{P}_{dopo}|^2 + |\vec{P}_{prima}|^2} = \\ &= \sqrt{m^2(\omega')^2 d^2 + m^2 v_p^2} \end{aligned} \tag{14}$$
  dove la velocità v_p della particella immediatamente prima dell'urto è determinata dalla sua altezza di caduta e vale
$$v_p = \sqrt{2gh} \tag{15}$$
  mentre ω' è dato dalla Eq.(10). Otteniamo dunque
$$|\Delta\vec{P}| = \sqrt{\frac{m^2\omega^2 d^2}{\left(1 + 2\frac{m}{M}\frac{d^2}{R^2}\right)^2} + 2m^2 gh} \tag{16}$$

- L'angolo che $\Delta\vec{P}$ forma con la verticale vale
$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\frac{|\vec{P}_{dopo}|}{|\vec{P}_{prima}|} = \\ &= \arctan\frac{m\omega' d}{mv_p} = \arctan\left(\frac{\omega d}{(1 + 2\frac{m}{M}\frac{d^2}{R^2})\sqrt{2gh}}\right) \end{aligned} \tag{17}$$



3. Dato che il momento angolare non si conserva attraverso l'urto, abbiamo

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{dopo} - \vec{L}_{prima} \tag{18}$$

Anche questa variazione viene assorbita dal perno, e costituisce appunto l'impulso angolare della reazione vincolare durante l'urto. Osserviamo che, a differenza della quantità di moto che è dovuta solo alla particella, il momento angolare è dovuto sia prima che dopo l'urto al disco ed anche alla particella. In particolare abbiamo

- prima dell'urto

$$\begin{aligned} \vec{L}_{prima} &= \underbrace{\vec{L}_{D,prima}}_{\text{disco}} + \underbrace{\vec{L}_{p,prima}}_{\text{particella}} = \\ &= I_D\,\omega\hat{k} - m d v_p\ \hat{u}_x \end{aligned} \tag{19}$$

- dopo l'urto

$$\vec{L}_{dopo} = (I_D + md^2)\,\omega'\hat{k} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \Delta\vec{L} &= \vec{L}_{dopo} - \vec{L}_{prima} = \\ &= \underbrace{(I_D + md^2)\,\omega'\hat{k} - I_D\,\omega\hat{k}}_{=0 \quad \text{Eq.}(5)} + m d v_p\ \hat{u}_x = \\ &= m d v_p\ \hat{u}_x = \\ &= m d\sqrt{2gh}\ \hat{u}_x \end{aligned} \tag{21}$$

dove le componenti lungo z si sono cancellate, appunto per la conservazione di L_z. Questa discontinuità $\Delta\vec{L}$ attraverso l'urto è proprio l'effetto del momento angolare impulsivo M_{perno} del perno.

Osservazione
Possiamo ora farci un'idea di com'è fatto il momento incognito M_{perno}. Infatti integrando nel tempo la (3) si ha

$$\Delta\vec{L} = \hat{u}_x \int_{t_0}^{\infty} (\underbrace{M_{peso}}_{=-mg\,d} + M_{perno})\,dt \tag{22}$$

dove t_0 è l'istante in cui la particella inizia a cadere dall'altezza iniziale h. Sappiamo che dopo l'urto M_{perno} dev'essere uguale e contrario a M_{peso} in modo da mantenere il momento angolare lungo $\hat{u}_x$ costantemente uguale a zero. Tuttavia durante l'urto avrà una parte impulsiva il cui integrale nel tempo darà proprio l'impulso angolare $\Delta\vec{L}$. Siccome l'urto dura per un intervallo di tempo τ molto breve, durante tale intervallo M_{perno} avrà un picco molto intenso, dell'ordine di $M_{perno}^{max} \sim |\Delta\vec{L}|/\tau$. L'andamento di L_x e di $M_x = M_{peso} + M_{perno}$ è schematicamente rappresentato in Fig.1 dove, in particolare, l'inserto rappresenta uno zoom temporale attorno all'istante t_u in cui avviene l'urto.

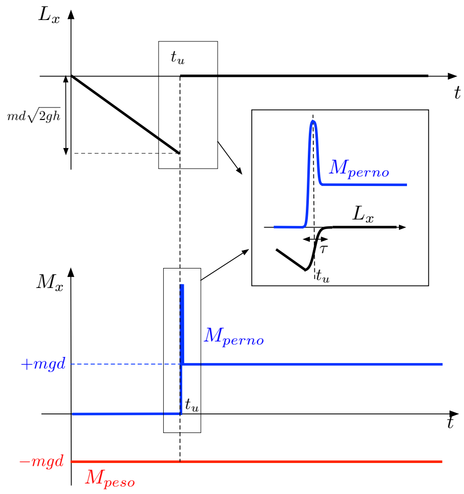


Figure 1: Andamento nel tempo della componente L_x del momento angolare (riquadro superiore) e della componente M_x del momento delle forze esterne: momento della forza peso (rosso) e momento del perno (blu). La discontinuità $\Delta L_x = md\sqrt{2gh}$ attraverso l'urto [vedi Eq.(21)] è dovuta al momento M_{perno} che è impulsivo, ossia ha un picco molto intenso durante il breve intervallo di tempo τ in cui avviene l'urto.