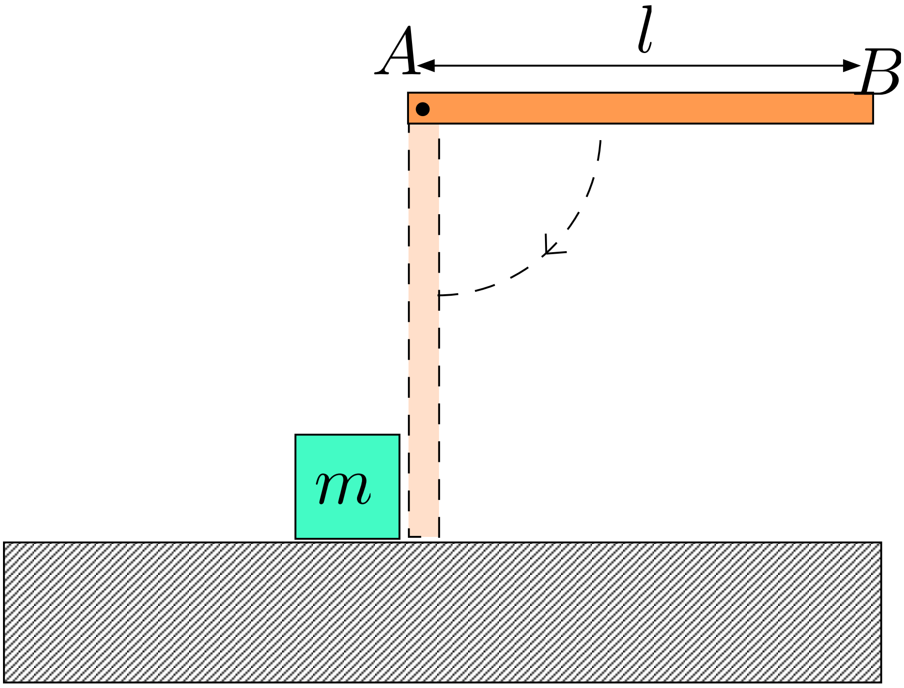
Esercizio (tratto dal Problema 6.33 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un'asta di lunghezza $l = 1.2\,\mathrm{m}$ e massa $M = 0.5\,\mathrm{kg}$ è incernierata nel suo estremo A ad un perno fisso e può oscillare senza attrito in un piano verticale. All'istante $t = 0$ l'asta, che è in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare. Raggiunta la posizione verticale l'asta urta un piccolo oggetto, inizialmente fermo, di massa $m = 0.25\,\mathrm{kg}$, che parte con velocità orizzontale v_0, mentre l'asta si ferma. Calcolare:

1. la velocità angolare dell'asta un istante prima dell'urto;
2. la velocità v_0;
3. l'energia cinetica dissipata nell'urto;
4. l'impulso durante l'urto.



SOLUZIONE

Si tratta di un problema di **urto vincolato**, dato che nell'urto tra l'asta ed il corpo m l'asta è soggetta al vincolo del perno. Dividiamo schematicamente il moto in tre fasi:

$a)$ prima dell'urto;
$b)$ urto;
$c)$ dopo l'urto

1. **PRIMA DELL'URTO**
   Consideriamo la fase $a)$ del moto. In tale fase il punto materiale m è fermo, mentre l'asta è in movimento.

   - Le forze che agiscono sull'asta sono:
     - forza peso (conservativa);
     - reazione vincolare $\vec{R}$ del perno (applicata all'estremo A dell'asta che rimane fermo, quindi $\vec{R}$ *non* compie lavoro e, *per quanto riguarda il bilancio energetico*, è come se non ci fosse

$$\Delta E_m = W_{\vec{R}} = \int \vec{R} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{=0} = 0$$

   Pertanto ne concludiamo che, in questa prima fase del moto, l'energia meccanica si conserva.

$$E_m^{in} = E_m^{fin} \tag{1}$$

   - Tale energia meccanica consiste dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.
     - L'energia potenziale si valuta immaginando tutta la massa dell'asta concentrata nel suo baricentro (il centro dell'asta stessa)

$$E_p = Mgz_{CM} \tag{2}$$

       Se consideriamo come altezza $z = 0$ di riferimento quella del piano in cui giace il punto materiale m abbiamo

$$E_p^{in} = Mgz_{CM}^{in} = Mgl \tag{3}$$

$$E_p^{fin} = Mgz_{CM}^{fin} = Mg\frac{l}{2} \tag{4}$$

     - Energia cinetica si può valutare procedendo in due modi equivalenti.

       * PRIMO MODO
         Il primo modo consiste nel pensare all'asta che ruota come un corpo rigido che ruota attorno ad un estremo (perno). Pertanto l'energia cinetica è data dalla *sola* energia cinetica di rotazione *attorno all'estremo*

$$E_K = \frac{1}{2} I_p \omega^2 \tag{5}$$

         dove ω è la velocità angolare dell'asta (che varia nel tempo!), mentre I_p è il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse perpendicolare al foglio e passante per il

perno.
Per determinare tale momento d'inerzia applichiamo il teorema di Huygens-Steiner

$$I_p = M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + I_{CM} \tag{6}$$

dove $l/2$ è la distanza tra il perno ed il centro di massa e

$$I_{CM} = \frac{1}{12}Ml^2 \tag{7}$$

è il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse perpendicolare al foglio e passante per il suo centro di massa. E' facile vedere che si ottiene

$$I_p = \frac{1}{3}Ml^2 \tag{8}$$

∗ SECONDO MODO
Il secondo modo consiste nel guardare all'asta come un corpo rigido il cui moto è caratterizzato dal moto traslatorio del centro di massa (in tal caso il centro di massa descrive un cerchio) e dal moto rotatorio dell'asta attorno al suo centro di massa (mentre il CM scende l'asta deve ruotare attorno ad esso, proprio per far sì che l'estremo in alto rimanga fisso)

$$E_K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{9}$$

dove I_{CM} è il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse perpendicolare al foglio e passante per il suo centro di massa, e vale

$$I_{CM} = \frac{1}{12}Ml^2 \tag{10}$$

Si noti che siccome il CM compie esso stesso un moto rotatorio, la velocità v_{CM} del CM è data da

$$v_{CM} = \omega\frac{l}{2} \tag{11}$$

Inserendo tale espressione in (12) otteniamo

$$E_K = \frac{1}{2}\left(M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + I_{CM}\right)\omega^2 \tag{12}$$

Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned} E_K^{in} &= 0 && (13)\\ E_K^{fin} &= \frac{1}{2}I_p\omega_{prima}^2 && (14) \end{aligned}$$

dove con ω_{prima} abbiamo indicato la velocità angolare immediatamente prima dell'urto, ossia la velocità angolare finale per questa prima fase.

Applicando dunque la conservazione dell'energia meccanica (1) abbiamo

$$
\begin{aligned}
E_m^{in} &= E_m^{fin} && (15)\\
Mgl &= Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2} I_p \omega_{prima}^2 && (16)\\
Mg\frac{l}{2} &= \frac{1}{2} I_p \omega_{prima}^2 && (17)\\
\Rightarrow \quad & \omega_{prima} = \sqrt{\frac{Mgl}{I_p}} && (18)
\end{aligned}
$$

Utilizzando la (8) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\omega_{prima} &= \sqrt{\frac{Mgl}{I_p}} = \\
&= \sqrt{\frac{Mgl}{\frac{1}{3} M l^2}} && (19)
\end{aligned}
$$

e dunque

$$
\omega_{prima} = \sqrt{\frac{3g}{l}} \qquad (20)
$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$
\begin{aligned}
\omega_{prima} &= \sqrt{\frac{3 \cdot 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1.2 \, \mathrm{m}}} = \\
&= 4.95 \, \mathrm{s}^{-1} && (21)
\end{aligned}
$$

2. **URTO**
   Consideriamo ora l'urto.

   - L'energia non è conservata nell'urto, dato che il problema non precisa esplicitamente che si tratti di urto elastico. Del resto, al punto 3., il problema chiede proprio di calcolare l'energia cinetica dissipata;

   - Consideriamo la quantità di moto del sistema asta + punto. Tale sistema *non* è un sistema isolato. Infatti l'asta è vincolata al perno, ed è anche soggetta alla forza peso. La reazione vincolare $\vec{R}$ del perno e la forza peso $M\vec{g}$ sono forze esterne al sistema asta + punto. In conseguenza di ciò, la quantità di moto *non* è conservata.

   - Consideriamo il momento angolare del sistema asta + punto rispetto al polo=punto A. Il momento angolare varia secondo la legge

     $$
     \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e \qquad (22)
     $$

     dove $\vec{M}^e$ è il momento delle forze esterne al sistema, che nel nostro caso sono la reazione vincolare $\vec{R}$ e la forza peso $m\vec{g}$.

     La reazione vincolare $\vec{R}$ non esercita alcun momento (perchè ha braccio nullo rispetto a tale polo)

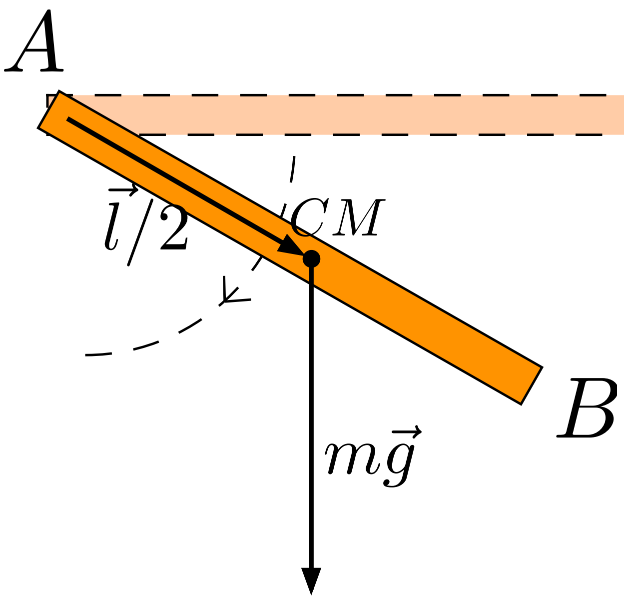
     $$
     \vec{M}_{perno} = \underbrace{\vec{r}}_{=0} \times \vec{R} = 0
     $$

e dunque non influisce sul momento angolare.

Tuttavia la forza peso, che è applicata al baricentro dell'asta, situato a $\vec{l}/2$ rispetto al polo A, esercita un momento sull'asta, e dunque cambia in generale il momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{peso} = \frac{\vec{l}}{2} \times m\vec{g}$$

Pertanto, *in generale* il momento angolare $\vec{L}$ del sistema asta + punto varia nel tempo e dunque *non* si conserva nel tempo (=non rimane costante nel tempo).



Tuttavia possiamo osservare che:

(a) essendo la forza peso una forza non-impulsiva, il suo momento $\vec{M}_{peso}$ non è impulsivo. Pertanto, anche se tale momento causa la variazione del momento angolare $\vec{L}(t)$, tale variazione non avviene mai attraverso dei salti discontinui (in nessun istante, non solo quello dell'urto). Per vederlo esplicitamente, consideriamo l'istante t_u dell'urto ed integriamo l'equazione cardinale in un intervallo $[t_u - \varepsilon; t_u + \varepsilon]$ attorno a quell'istante

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}_{peso} \\
& \quad \text{[integro tra } [t_u - \varepsilon; t_u + \varepsilon] \text{]} \\
\int_{t_u-\varepsilon}^{t_u+\varepsilon} \frac{d\vec{L}}{dt}\, dt &= \int_{t_u-\varepsilon}^{t_u+\varepsilon} \vec{M}_{peso}(t)\, dt \\
& \quad \text{[applico il teorema fondamentale del calcolo integrale]} \\
\vec{L}(t_u+\varepsilon) - \vec{L}(t_u-\varepsilon) &= \int_{t_u-\varepsilon}^{t_u+\varepsilon} \vec{M}_{peso}(t)\, dt \simeq \underbrace{\vec{M}_{peso}(t_u)}_{\text{finito}} 2\varepsilon \ \ \to 0 \ \text{ per } \varepsilon \to 0 \\
& \Downarrow \\
\vec{L}(t_u+\varepsilon) &= \vec{L}(t_u-\varepsilon) \qquad\qquad [\vec{L}(t) \text{ è continua all'istante } t_u \text{ dell'urto}] \quad (23)
\end{aligned}$$

Pertanto, sebbene non si conservi nel tempo, il momento angolare $\vec{L}(t)$ *si conserva attraverso l'urto*, ossia il valore di $\vec{L}(t)$ *immediatamente prima* dell'urto è uguale al valore di

$\vec{L}$ *immediatamente dopo* l'urto (non subisce sati discontinui)

$$\begin{aligned}\vec{L}(t_u+\varepsilon) &= \vec{L}(t_u-\varepsilon) \\ &\Downarrow \\ \vec{L}_{prima} &= \vec{L}_{dopo} \end{aligned} \tag{24}$$

E' facile vedere che lo stesso ragionamento si applica integrando attorno a qualunque istante, non solo quello dell'urto. Pertanto $\vec{L}(t)$ è sempre una funzione continua del tempo.

(b) Possiamo anche arrivare alla stessa conclusione da un altro punto di vista, focalizzandoci all'istante t_u dell'urto. Osserviamo che l'urto avviene quando l'asta si trova in posizione verticale. Precisamente in questa particolare posizione il momento $\vec{M}_{peso}$ della forza peso si annulla, dato che il braccio $\vec{l}/2$ e la forza peso $m\vec{g}$ sono paralleli (entrambi diretti verso il basso). Pertanto, all'istante dell'urto il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema è addirittura nullo, e dunque il sistema è istantaneamente isolato.

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{t=t_u} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \tag{25}$$

Per una o l'altra di tali motivazioni, il momento angolare $\vec{L}$, pur cambiando nel tempo, si conserva *attraverso l'urto*, ossia

$$\vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \tag{26}$$

Utilizziamo dunque questa legge di conservazione per determinare la velocità del punto materiale dopo l'urto.

- Dato che il moto (sia dell'asta che del punto materiale) avviene lungo il piano verticale, il momento angolare $\vec{L}$ è diretto nella direzione perpendicolare al foglio. Denotiamo con $\hat{k}$ il versore entrante nel foglio. Allora abbiamo

$$\vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \tag{27}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{L}^{asta}_{prima} + \vec{L}^{punto}_{prima} = \vec{L}^{asta}_{dopo} + \vec{L}^{punto}_{dopo} \tag{28}$$
$$\Downarrow$$
$$I_p\omega_{prima}\,\hat{k} \;+\; 0 = 0 \;+\; lmv_0\hat{k} \tag{29}$$
$$\Downarrow$$
$$I_p\omega_{prima} = lmv_0 \tag{30}$$

da cui

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{I_p\omega_{prima}}{ml} = \\ &= \frac{1}{3}\frac{Ml^2\sqrt{\frac{3g}{l}}}{ml} = \\ &= \frac{M}{3m}l\sqrt{\frac{3g}{l}} = \\ &= \frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl}{3}} \end{aligned} \tag{31}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{0.5\,\cancel{\mathrm{kg}}}{0.25\,\cancel{\mathrm{kg}}}\sqrt{\frac{9.81\,\cdot\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,1.2\,\mathrm{m}}{3}} = \\ &= 3.96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{32}$$

3. **DOPO DELL'URTO**
Calcoliamo ora l'energia cinetica dissipata nell'urto, ossia

$$\Delta E_K = E_{K,dopo} - E_{K,prima} \tag{33}$$

dove

- L'energia cinetica prima dell'urto è solo dovuta all'asta (dato che il punto materiale è fermo)

$$E_{K,prima} = \frac{1}{2} I_p \omega^2_{prima} \tag{34}$$

- L'energia cinetica dopo l'urto è solo dovuta al punto materiale (dato che l'asta rimane ferma in verticale)

$$E_{K,dopo} = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{35}$$

Pertanto l'energia dissipata vale

$$\begin{aligned} \Delta E_K &= E_{K,dopo} - E_{K,prima} = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} I_p \omega^2_{prima} = \\ &\quad [\text{uso ora (31) e (20)}] \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl}{3}} \right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} M l^2 \cdot \frac{3g}{l} = \\ &= \frac{1}{6} M \cdot \frac{M}{m} gl - \frac{1}{2}\cdot Mgl = \\ &= \frac{1}{2} Mgl \left(\frac{M}{3m} - 1 \right) \end{aligned} \tag{36}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta E_K &= \frac{1}{2} 0.5\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1.2\,\mathrm{m} \left(\frac{0.5\,\mathrm{kg}}{3\cdot 0.25\,\mathrm{kg}} - 1 \right) = \\ &= -0.98\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = \\ &= -0.98\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{37}$$

Tale variazione *negativa* di energia implica che l'energia cinetica dopo l'urto è minore di quella prima dell'urto, ossia l'energia si è dissipata nell'urto.
Si noti anche che l'energia potenziale rimane inaltertata attraverso l'urto.

4. L'impulso attraverso nell'urto è pari alla variazione della quantità di moto

$$\vec{J} = \vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima} \tag{38}$$

dove

- L'impulso prima dell'urto è dovuto alla sola asta, ed è data dalla quantità di moto del centro di massa dell'asta. E' diretto verso sinistra, ed in modulo è pari a

$$\begin{aligned}
\vec{P}_{prima} &= -Mv_{CM}\,\hat{u}_x = -M\omega_{prima}\frac{l}{2}\,\hat{u}_x = \\
&\quad \text{uso (20)} \\
&= -M\sqrt{\frac{3g}{l}}\frac{l}{2}\,\hat{u}_x = \\
&= -\frac{M}{2}\sqrt{3gl}\,\hat{u}_x \qquad (39)
\end{aligned}$$

- L'impulso dopo l'urto è dovuto al solo punto materiale (dato che l'asta rimane ferma). E' diretto verso sinistra e in modulo vale

$$\begin{aligned}
\vec{P}_{dopo} &= -mv_0\,\hat{u}_x = \\
&\quad [\text{uso (31)}] \\
&= -m\frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl}{3}}\,\hat{u}_x = \\
&= -\frac{M}{3}\sqrt{3gl}\,\hat{u}_x \qquad (40)
\end{aligned}$$

Pertanto l'impulso vale

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima} = \\
&= -\frac{M}{3}\sqrt{3gl}\,\hat{u}_x - \left(-\frac{M}{2}\sqrt{3gl}\,\hat{u}_x\right) = \\
&= +\frac{M}{6}\sqrt{3gl}\,\hat{u}_x \qquad (41)
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori, vale

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \frac{0.5\,\mathrm{kg}}{6}\sqrt{3\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1.2\,\mathrm{m}}\;\hat{u}_x = \\
&= 0.50\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{u}_x \qquad (42)
\end{aligned}$$

E' dunque diretto nella direzione opposta a quella di P_{prima} e P_{dopo}, ossia è diretto verso destra. Tale impulso è quella parte di quantità di moto iniziale che viene assorbita dal perno.