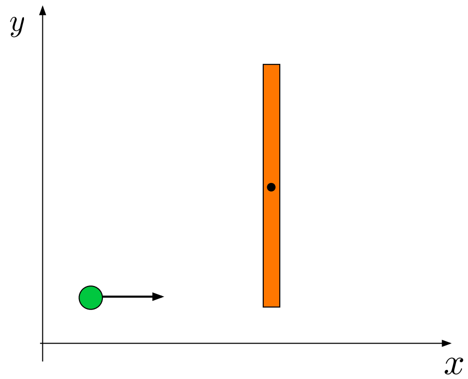
## Esercizio (tratto dal Problema 8.21 del Mazzoldi 2)

Un'asta rigida di sezione trascurabile, lunga $l = 1\,\mathrm{m}$ e di massa $M = 12\,\mathrm{kg}$ è imperniata nel centro ed è libera di ruotare in un piano orizzontale $xy$. Contro un suo estremo viene lanciato un oggetto di dimensioni trascurabili e di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, con velocità $\vec{v} = 2\,\hat{u}_x\,\mathrm{m/s}$; l'asta è orientata secondo l'asse $y$. Dopo l'urto l'oggetto rimbalza con velocità $\vec{v}\,' = -0.5\,\hat{u}_x\,\mathrm{m/s}$. Calcolare

1. la velocità angolare $\omega$ dell'asta dopo l'urto;
2. le componenti dell'impulso $\vec{J}$ comunicato al perno.




Si supponga ora che, con le stesse condizioni iniziali, l'urto avvenga elasticamente. Calcolare in questo caso:

3. $\omega'$ e $\vec{J}'$.

**SOLUZIONE**

Si tratta di un problema di **urto vincolato**, dato che nell'urto tra l'asta ed l'oggetto $m$ l'asta è soggetta al vincolo del perno.

1. Consideriamo il caso del **primo tipo di urto**.
   Esaminiamo varie grandezze cercando di capire se si conservano:

   - L'energia non è conservata nell'urto, dato che il problema non precisa esplicitamente che si tratti di urto elastico. Al contrario, siccome il testo richiede nella seconda parte di fare il confronto col caso dell'urto elastico, sappiamo per certo che questo primo tipo di urto non è elastico, e dunque l'energia *non* si conserva;

   - Consideriamo la quantità di moto del sistema asta + punto. Notiamo che non è un sistema isolato dato che l'asta è vincolata al perno. La reazione vincolare $\vec{R}$ del perno è una forza esterna al sistema asta + punto. In conseguenza di ciò, la quantità di moto *non* è conservata.
     E' almeno conservata attraverso l'urto? Non possiamo dirlo, perché la reazione vincolare (a differenza di altre forze esterne come la forza peso o l'attrito) è tipicamente una forza impulsiva, ed è probabile che essa generi nella quantità di moto un salto discontinuo attraverso l'urto. In effetti il problema chiede di calcolare l'impulso comunicato al perno, ossia la differenza tra le quantità di moto prima e dopo l'urto.

   - Consideriamo il momento angolare del sistema asta + punto rispetto al polo=perno. Il momento angolare totale varia nel tempo secondo la legge

     $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e \tag{1}$$

     dove $\vec{M}^e$ è il momento delle forze esterne al sistema. In questo caso l'unica forza esterna al sistema asta + punto è la reazione vincolare $\vec{R}$. Tuttavia essa non esercita alcun momento perchè ha braccio nullo rispetto al polo=perno

     $$\vec{M}^e = \vec{M}_{\vec{R}} = \underbrace{\vec{r}}_{=0} \times \vec{R} = 0$$

     Pertanto abbiamo

     $$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}(t) = \text{cost} \tag{2}$$

     ossia il momento angolare $\vec{L}$ del sistema asta + punto (calcolato rispetto al perno!) è costante nel tempo. Dunque, in particolare, si conserva attraverso l'urto (=è continua all'istante dell'urto):

     $$\vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \tag{3}$$

   - Consideriamo il momento angolare prima dell'urto. Esso è dovuto al solo oggetto di massa $m$, dato che l'asta è ferma.

     $$\vec{L}_{prima} = \vec{L}^{punto}_{prima} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{4}$$

– Tale momento angolare è diretto lungo l'asse ortogonale al foglio, nel verso uscente. Denotiamo

$$\hat{k} = \text{versore uscente} \tag{5}$$

– Notiamo che $\vec{r} = \vec{r}(t)$ varia nel tempo (l'oggetto $m$ si sposta nel tempo) mentre $\vec{v}$ è costante nel tempo (l'oggetto si muove di moto rettilineo uniforme). Tuttavia il prodotto vettoriale (4) *non* dipende dal tempo, dato che il braccio $b = |\vec{r}| \sin \alpha$ rimane costante nel tempo [vedi Fig.1]

$$\vec{L}_{prima} = \frac{l}{2} m v \, \hat{k} \tag{6}$$

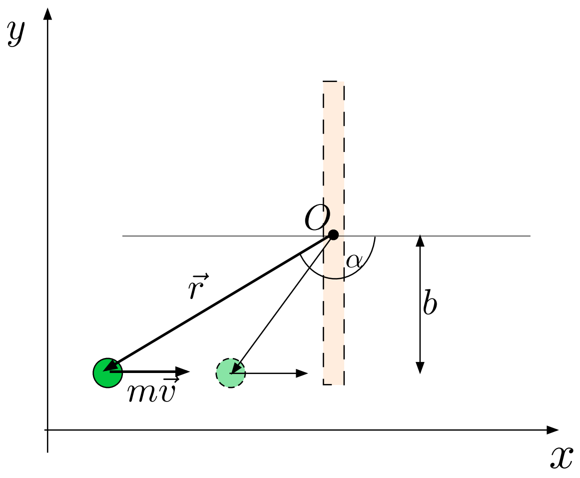



Figure 1:

- Consideriamo ora il momento angolare dopo l'urto. Mentre il punto materiale rimbalza con velocità di modulo $v' = 0.5\,\mathrm{m/s}$ in direzione opposta a quella incidente, l'asta viene posta in rotazione [vedi Fig.2]. Denotando con $\omega$ la sua velocità angolare e ricordando che $\hat{k}$ denota il versore ortogonale al foglio nel verso uscente, abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{L}_{dopo} &= \vec{L}^{punto}_{dopo} + \vec{L}^{asta}_{dopo} = \\ &= \vec{r} \times m\vec{v}' \; + \; I\omega\hat{k} = \\ &= -mv'\frac{l}{2}\hat{k} \; + \; I\omega\hat{k} \end{aligned} \tag{7}$$

Il momento d'inerzia di una sbarra rispetto all'asse passante per il suo centro vale

$$I = \frac{1}{12} M l^2 \tag{8}$$

e dunque

$$\vec{L}_{dopo} \;=\; \left( -mv'\frac{l}{2} + \frac{1}{12} M l^2 \omega \right) \hat{k} \tag{9}$$

- Uguagliando (6) e (9) si ottiene

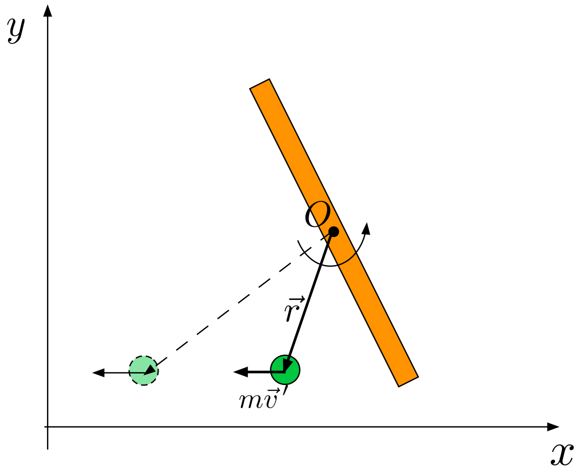



Figure 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{l}{2} mv\,\hat{k} &= \left(-mv'\frac{l}{2} + \frac{1}{12} Ml^2\omega\right)\hat{k} \\
&\Downarrow \\
\frac{l}{2} mv &= -mv'\frac{l}{2} + \frac{1}{12} Ml^2\omega \\
&\Downarrow \\
\frac{l}{2} m(v+v') &= \frac{1}{12} Ml^2\omega \\
&\Downarrow \\
\omega &= 6\,\frac{m}{M}\,\frac{v+v'}{l}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$
\begin{aligned}
\omega &= 6\,\frac{1\,\mathrm{kg}}{12\,\mathrm{kg}}\,\frac{(2+0.5)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\,\mathrm{m}} \\
&= \frac{2.5}{2}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \\
&= 1.25\,\mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

2. L'impulso comunicato al perno è per definizione

$$
\vec{J} = \vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima} \qquad\qquad \vec{P} = \vec{p}^{\,punto} + \vec{p}^{\,asta} \tag{12}
$$

Notiamo che

- La quantità di moto $\vec{p}^{\,asta}$ dell'asta è sempre nulla, sia prima che dopo l'urto. Ciò è dovuto al fatto che l'asta è imperniata al suo centro di massa. Dunque, anche se essa ruota, il suo centro di massa rimane fisso. Pertanto

$$
\begin{aligned}
\vec{J} &= \left(\vec{p}^{\,punto}_{dopo} + \underbrace{\vec{p}^{\,asta}_{dopo}}_{=0}\right) - \left(\vec{p}^{\,punto}_{prima} + \underbrace{\vec{p}^{\,asta}_{prima}}_{=0}\right) = \\
&= \vec{p}^{\,punto}_{dopo} - \vec{p}^{\,punto}_{prima}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

- Prima dell'urto la quantità di moto del punto materiale è
$$\vec{p}^{\,punto}_{prima} = m\vec{v} \tag{14}$$
- Dopo l'urto la quantità di moto del punto materiale vale
$$\vec{p}^{\,punto}_{prima} = m\vec{v}\,' \tag{15}$$
- Pertanto l'impulso vale
$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{p}^{\,punto}_{dopo} - \vec{p}^{\,punto}_{prima} = \\ &= m\vec{v}\,' - m\vec{v} = \\ &= m(-v'\,\hat{u}_x - v\,\hat{u}_x) = \\ &= -m(v' + v\,)\,\hat{u}_x \end{aligned} \tag{16}$$

  E' diretto lungo l'asse $x$ verso sinistra e vale in modulo
$$\begin{aligned} J = |\vec{J}| &= 1\,\mathrm{kg}\,(0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2.0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,) = \\ &= 2.5\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{17}$$

3. Passiamo ora a considerare il caso dell'**urto elastico**. Mentre nel caso del primo tipo di urto il testo ci dava esplicitamente il valore della velocità $\vec{v}\,'$ del punto materiale dopo l'urto, in questo secondo tipo di urto non conosciamo tale velocità. Tuttavia sappiamo che l'energia in un urto elastico si conserva. Pertanto abbiamo due relazioni
$$\begin{cases} \vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} & \text{(continua a valere per le stesse ragioni di prima)} \\ \\ K_{prima} = K_{dopo} & \text{(vale perché il testo ci dice che l'urto è elastico)} \end{cases} \tag{18}$$
ossia
$$\begin{cases} \frac{l}{2}mv = mv'\frac{l}{2} + I\omega' \\ \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 \end{cases} \tag{19}$$
Si tratta di un sistema di due equazioni nelle due incognite
$$\begin{aligned} v' &= \text{velocità del punto materiale dopo l'urto} \\ \\ \omega' &= \text{velocità angolare dell'asta dopo l'urto} \end{aligned}$$
   - Per risolvere il sistema, dalla prima delle Eq.(19) ricaviamo che
$$\omega' = (v - v')\frac{ml}{2I} \tag{20}$$

     e sostituendo nella seconda delle Eq.(19) si ottiene
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\,(v - v')^2\frac{m^2l^2}{4I^2} \\ &\Downarrow \\ v^2 &= v'^2 + (v - v')^2\frac{ml^2}{4I} \\ &\Downarrow \\ v^2 &= v'^2 + (v^2 - 2vv' + v'^2)\frac{ml^2}{4I} \end{aligned} \tag{21}$$

che è un'equazione per $v'$

$$v'^2\left(1+\frac{ml^2}{4I}\right)-2vv'\frac{ml^2}{4I}-v^2\left(1-\frac{ml^2}{4I}\right)=0 \tag{22}$$

Ricordando l'espressione Eq.(8) notiamo che

$$\frac{ml^2}{4I}=\frac{3m}{M} \tag{23}$$

L'equazione (22) pertanto è

$$v'^2\left(1+\frac{3m}{M}\right)-2vv'\frac{3m}{M}-v^2\left(1-\frac{3m}{M}\right)=0 \tag{24}$$

che ha per soluzioni

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\frac{3m}{M}v\pm\sqrt{\left(\frac{3m}{M}v\right)^2+v^2\left(1-\frac{3m}{M}\right)\left(1+\frac{3m}{M}\right)}}{1+\frac{3m}{M}}= \\ &= \frac{\frac{3m}{M}v\pm\sqrt{\left(\frac{3m}{M}\right)^2v^2+v^2\left(1-\left(\frac{3m}{M}\right)^2\right)}}{1+\frac{3m}{M}}= \\ &= \frac{\frac{3m}{M}v\pm v}{1+\frac{3m}{M}}= \end{aligned} \tag{25}$$

Raccogliendo $v$ a numeratore, le due soluzioni sono

$$\left\{\begin{aligned} v' &= v \\ v' &= -v\,\frac{1-\frac{3m}{M}}{1+\frac{3m}{M}} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

- La prima soluzione delle (26) indica che il proiettile dopo l'urto mantiene la stessa velocità iniziale. Questo corrisponde al proiettile che passa attraverso l'asta lasciandola ferma (infatti, inserendo $v'=v$ nell'Eq.(20) si vede che $\omega'=0$.) Non è pertanto fisicamente accettabile.

- La seconda soluzione delle (26)

$$v'=-v\,\frac{1-\frac{3m}{M}}{1+\frac{3m}{M}} \tag{27}$$

invece è fisicamente accettabile.

• Sostituendo l'Eq.(27) nell'Eq.(20), si ottiene

$$\begin{aligned} \omega' &= \left(v+v\,\frac{1-\frac{3m}{M}}{1+\frac{3m}{M}}\right)\frac{ml}{2I}= \\ &= v\,\frac{1}{1+\frac{3m}{M}}\,\frac{ml}{I}= \\ &\quad \text{[uso l'Eq.(8)]} \\ &= \frac{v}{l}\,\frac{12}{1+\frac{3m}{M}}\,\frac{m}{M} \end{aligned} \tag{28}$$

Pertanto le soluzioni sono le (27) e (28):

$$\begin{cases} \omega' &= \dfrac{v}{l}\dfrac{12}{1+\frac{3m}{M}}\dfrac{m}{M} \\ \\ v' &= -v\,\dfrac{1-\frac{3m}{M}}{1+\frac{3m}{M}} \end{cases} \tag{29}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{cases} \omega' &= \dfrac{2\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}}{1\,\cancel{\mathrm{m}}}\,\dfrac{1\cancel{2}}{1+\frac{3\,\cancel{\mathrm{kg}}}{12\,\cancel{\mathrm{kg}}}}\,\dfrac{1\,\cancel{\mathrm{kg}}}{1\cancel{2}\,\cancel{\mathrm{kg}}} = \dfrac{2}{\mathrm{s}}\,\dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{\mathrm{s}}\,\dfrac{8}{5} = 1.6\,\mathrm{s}^{-1} \\ \\ v' &= -2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\dfrac{1-\frac{3\,\cancel{\mathrm{kg}}}{12\,\cancel{\mathrm{kg}}}}{1+\frac{3\,\cancel{\mathrm{kg}}}{12\,\cancel{\mathrm{kg}}}} = 2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\dfrac{\frac{3}{\cancel{4}}}{\frac{5}{\cancel{4}}} = -\dfrac{6}{5}\,\mathrm{m/s} = -1.2\,\mathrm{m/s} \end{cases} \tag{30}$$

Per quanto riguarda il caso dell'impulso in questo secondo tipo di urto abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{J'} &= \vec{p}\,'_{dopo} - \vec{p}_{prima} = \\ &= m\vec{v}\,' - m\vec{v} = \\ &= m(v'\,\hat{u}_x - v\,\hat{u}_x) = \\ &= m(v' - v\,)\,\hat{u}_x \end{aligned} \tag{31}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{J'} &= 1\,\mathrm{kg}\,(-1.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 2.0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,)\,\hat{u}_x = \\ &= -3.2\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{u}_x \end{aligned} \tag{32}$$

e anche questo è diretto verso sinistra.