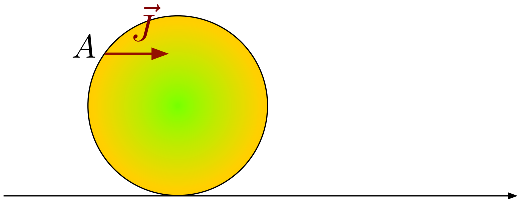
Esercizio (tratto dall'Esempio 6.23 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Una sfera omogenea di massa M e raggio R è posta sopra un piano orizzontale scabro. Inizialmente la sfera è in quiete. In un punto A della superficie e giacente su piano verticale x-y passante per il centro della sfera viene applicato un impulso $\vec{J}$ diretto orizzontalmente verso destra.

1. determinare il moto della sfera se il punto A si trova all'altezza del centro;
2. determinare a quale altezza h dal suolo occorre applicare l'impulso $\vec{J}$ affinché la sfera inizi a muoversi di moto di puro rotolamento.



SOLUZIONE

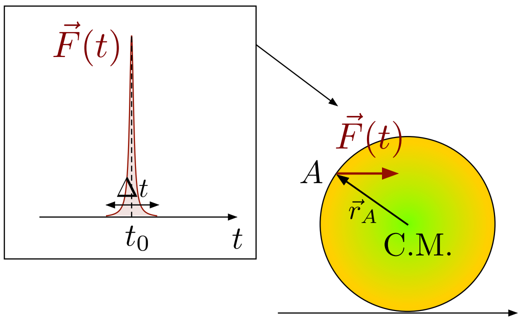
Nel punto A viene applicata una forza impulsiva $\vec{F}(t)$, ossia una forza molto intensa ma applicata per un brevissimo lasso di tempo $\Delta t = [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$ attorno all'istante t_0 (vedi inset nella figura). Possiamo scegliere $t_0 = 0$.

$$\Delta t = [-\epsilon; +\epsilon] \tag{1}$$

L'impulso $\vec{J}$ è l'integrale *nel tempo* della forza impulsiva $\vec{F}(t)$.

$$\vec{J} = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{F}(t)\, dt \tag{2}$$

e rappresenta l'intensità del 'colpo' che viene assestato alla sfera.



- Per il teorema dell'impulso, l'impulso è pari alla variazione della quantità di moto totale

$$\vec{J} = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{F}(t)\, dt \quad = \quad \Delta \vec{P} = \underbrace{\vec{P}(t = +\epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente} \\ \text{dopo il colpo}}} \quad - \quad \underbrace{\vec{P}(t = -\epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente} \\ \text{prima del colpo}}} \tag{3}$$

  Siccome prima del colpo la sfera è ferma, la sua quantità di moto totale è $\vec{P}(t = -\epsilon) = 0$ e possiamo scrivere

$$\vec{J} = \vec{P}(t = +\epsilon) \tag{4}$$

- D'altra parte per un sistema di punti materiali (e dunque in particolare per un corpo rigido) vale sempre, ad ogni istante, che

$$\vec{P}(t) = M\vec{v}_{CM}(t) \tag{5}$$

  Quindi in particolare all'istante $t = +\epsilon$ immediatamente dopo l'urto, avremo

$$\vec{P}(t = +\epsilon) = M\vec{v}_{CM}(t = +\epsilon) \tag{6}$$

  Notazione
  Per semplificare la notazione denoteremo

$$\begin{cases} t_0 + \epsilon & = & 0 + \epsilon = 0^+ \\ t_0 - \epsilon & = & 0 - \epsilon = 0^- \end{cases} \tag{7}$$

- Mettendo insieme le relazioni (4) e (6) si ottiene

$$\vec{J} = M\vec{v}_{CM}(0^+) \tag{8}$$

ossia

$$\boxed{\vec{v}_{CM}(0^+) = \frac{\vec{J}}{M}} \tag{9}$$

Questa equazione ci dice che l'impulso applicato fissa la velocità *iniziale* del centro di massa della sfera. Considerando che $\vec{J}$ è diretto lungo x ($\vec{J} = J\hat{u}_x$) si ha anche $\vec{v}_{CM}(0^+) = v_{CM}(0^+)\hat{u}_x$ e dunque

$$v_{CM}(0^+) = \frac{J}{M} \tag{10}$$

- Consideriamo ora il centro di massa come polo. La forza impulsiva $\vec{F}(t)$ applicata nel punto A genera anche un momento impulsive $\vec{M}(t)$.

$$\vec{M}(t) = \vec{r}_A \times \vec{F}(t) \tag{11}$$

dove $\vec{r}_A$ è il vettore che va dal centro di massa della sfera al punto di applicazione A. Integrando nel tempo nell'intervallo di applicazione della forza otteniamo l'impulso angolare

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{M}(t)\, dt \;=\; \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (\vec{r}_A \times \vec{F}(t))\, dt \;=\; \vec{r}_A \times \underbrace{\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{F}(t)\, dt}_{=\vec{J}} = \vec{r}_A \times \vec{J} \tag{12}$$

- Per il teorema dell'impulso angolare, l'integrale nel tempo del momento è pari alla variazione del momento angolare totale

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{M}(t)\, dt \;=\; \Delta\vec{L} = \underbrace{\vec{L}(t = +\epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente} \\ \text{dopo il colpo}}} \;-\; \underbrace{\vec{L}(t = -\epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente} \\ \text{prima del colpo}}} \tag{13}$$

Siccome prima del colpo la sfera è ferma, il momento angolare totale prima del colpo è $\vec{L}(t = -\epsilon) = 0$ e possiamo scrivere

$$\vec{r}_A \times \vec{J} = \vec{L}(t = +\epsilon) \tag{14}$$

- D'altra parte, siccome il CM (punto per cui passa l'asse di rotazione) è anche centro di simmetria per la sfera, e siccome il punto A giace sul piano verticale x-y e $\vec{J} = J\hat{u}_x$ è diretto lungo x, abbiamo

$$\vec{L}(t = +\epsilon) = I\,\vec{\omega} = I\omega(t = +\epsilon)\hat{k} \tag{15}$$

dove $\hat{k}$ è il versore entrante nel foglio.

- Mettendo insieme le relazioni (14) e (15) e usando la notazione (7) si ha

$$\boxed{\vec{r}_A \times \vec{J} = I\omega(0^+)\hat{k}} \tag{16}$$

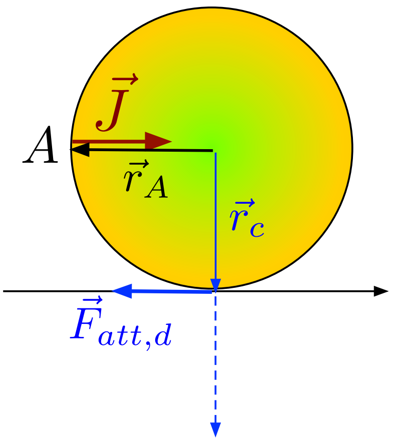
Pertanto l'impulso $\vec{J}$ e anche il punto A in cui viene applicato (tramite il suo vettore $\vec{r}_A$) determinano la velocità angolare *iniziale* di rotazione della sfera

Fino a questo momento il punto A si trova ad un'altezza generica dal suolo.

1. **PUNTO A ALL'ALTEZZA DEL CM**
Supponiamo ora che il punto A si trovi proprio all'altezza del centro di massa, ossia ad una distanza R dal suolo. In tal caso (vedi figura) i vettori $\vec{r}_A$ e $\vec{J}$ sono antiparalleli e dunque il prodotto vettoriale nella (16) è nullo, e dunque

$$\omega(0^+) = 0 \tag{17}$$

ossia inizialmente la sfera non ruota.



Deduciamo dunque che (almeno inizialmente) il moto della sfera *non può essere* di puro rotolamento. Infatti la condizione di puro rotolamento prevederebbe

$$\begin{array}{l}\text{condizione di} \\ \text{puro rotolamento}\end{array} \quad \rightarrow \quad v_{CM} = \omega\, R \qquad \text{mentre all'inizio} \qquad \left\{ \begin{array}{l} v_{CM}(0^+) \neq 0 \\ \omega(0^+) = 0 \end{array} \right. \tag{18}$$

Pertanto la sfera inizia a muoversi strisciando. L'attrito col piano scabro è dunque un attrito *dinamico* e vale

$$\vec{F}_{att,d} = -\mu_D\, Mg\, \hat{u}_x \tag{19}$$

Studiamo dunque la dinamica della sfera dopo il lancio, soggetta a tale forza.

- **moto traslatorio del CM**
Il centro di massa si muove soggetto alle forze esterne (=attrito) e la sua accelerazione è data da

$$\begin{aligned} Ma_{CM} &= F^{ext} = -\mu_D M g \\ &\rightarrow \quad a_{CM} = -\mu_D\, g = \text{cost} \end{aligned} \tag{20}$$

Pertanto, essendo l'accelerazione del CM costante nel tempo, esso si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato (decelerato), con una velocità iniziale nota e determinata dall'Eq.(10). La legge oraria del moto del centro di massa vale pertanto

$$v_{CM}(t) = v_{CM}(0^+) - \mu_D g\, t \tag{21}$$

Ricordando la (10) si ha

$$\boxed{v_{CM}(t) = \frac{J}{M} - \mu_D g\, t} \tag{22}$$

- **moto rotatorio attorno al CM**
  D'altra parte la forza di attrito applica anche un momento. Il moto rotatorio rispetto al CM è descritto dalla relazione

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}^{ext} = \vec{M}^{att.d} \tag{23}$$

dove $\vec{L}'$ è il momento angolare calcolato rispetto al CM e vale

$$\vec{L}' = I\omega\,\hat{k} \tag{24}$$

mentre $\vec{M}^{att.d}$ è il momento della forza esterna (=attrito dinamico), applicata al punto di contatto identificato dal vettore $\vec{r}_c$ rispetto al CM, e vale

$$\vec{M}^{att.d} = \vec{r}_c \times \vec{F}_{att.d} = \underbrace{|\vec{r}_c|}_{=R}\,\underbrace{|\vec{F}_{att.d}|}_{=\mu_D Mg}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\,\hat{k} = R\,\mu_D M g\hat{k} \tag{25}$$

con

$$\hat{k} = \text{versore entrante} \tag{26}$$

Inserendo le equazioni (24) e (25) nella (39) si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \vec{M}^{att} \\
&\Downarrow \\
\frac{d(I\omega\,\hat{k})}{dt} &= R\,\mu_D M g\hat{k} \\
&\Downarrow \\
I\,\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{=\alpha}\,\hat{k} &= R\,\mu_D M g\hat{k} \\
&\Downarrow \\
I\alpha &= R\,\mu_D M g
\end{aligned} \tag{27}$$

da cui l'accelerazione angolare vale

$$\alpha = \frac{R\,\mu_D M g}{I} = \text{cost} \tag{28}$$

Siccome l'accelerazione angolare è costante, il moto rotatorio della sfera è un moto circolare uniformemente accelerato, con velocità angolare iniziale data dalla (17). Pertanto la legge oraria della velocità angolare vale

$$\omega(t) = \underbrace{\omega(0^+)}_{=0} + \alpha\,t = \frac{R\,\mu_D M g}{I}\,t \tag{29}$$

Osserviamo che, mentre la legge oraria (22) del CM dipende dalla massa M della sfera, quella del moto rotatorio dipende dal suo momento d'inerzia. In particolare, ricordando che il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse passante per il suo centro vale

$$I = \frac{2}{5} M\,R^2 \tag{30}$$

si ottiene

$$\omega(t) = \frac{R\,\mu_D \cancel{M} g}{\frac{2}{5}\cancel{M} R^2}\,t \tag{31}$$

ossia

$$\boxed{\omega(t) = \frac{5}{2}\frac{\mu_D g}{R}\,t} \tag{32}$$

- **Osservazione**
La forza di attrito dinamico ha un duplice effetto. Da un lato rallenta il moto del centro di massa, facendo diminuire la velocità del suo moto traslazione [vedi (22)]. Dall'altro fa aumentare la velocità angolare di rotazione (che inizialmente era nulla) [vedi (32)].

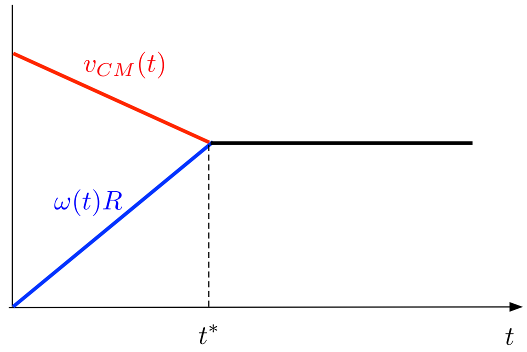


Figure 1: Fino a $t = t^*$ la velocità traslazionale decresce mentre la velocità angolare cresce, mentre per $t > t^*$ si ha un moto di puro rotolamento con velocità traslazionale costante (rettilineo uniforme) e velocità rotazionale ω^*, senza alcuna forza di attrito (né dinamico né statico).

- Ricordiamo che il puro rotolamento si ha quando $v_{CM} = \omega R$. Confrontando le leggi orarie del centro di massa [Eq.(22)] e della quantità $\omega(t)R$ [ottenuta moltiplicando la (32) per R], si vede che esiste un istante t^* al quale queste due velocità risultano uguali

$$\begin{aligned} v_{CM}(t^*) &= \omega(t^*)R \\ &\Downarrow \\ \frac{J}{M} - \mu_D g\, t^* &= \frac{5}{2}\frac{\mu_D g}{R}\, t^*\, R \\ &\Downarrow \\ \frac{J}{M} &= \mu_D g \left(1 + \frac{5}{2}\right) t^* \end{aligned} \tag{33}$$

da cui otteniamo

$$\boxed{t^* = \frac{2}{7}\frac{J}{\mu_D M g}} \tag{34}$$

In tale istante la velocità del centro di massa vale

$$\begin{aligned} v^* = v_{CM}(t^*) &= \frac{J}{M} - \mu_D g\, t^* = \\ &= \frac{J}{M} - \mu_D g\, \frac{2}{7}\frac{J}{\mu_D M g} = \\ &= \frac{J}{M} - \frac{2}{7}\frac{J}{M} \end{aligned} \tag{35}$$

ossia

$$\boxed{v^* = \frac{5}{7}\frac{J}{M} = \frac{5}{7} v_{CM}(0^+)} \tag{36}$$

e la velocità angolare vale ovviamente $\omega(t^*) = \frac{v^*}{R}$, ossia

$$\boxed{\omega^* = \omega(t^*) = \frac{5}{7}\frac{v_{CM}(0^+)}{R}} \tag{37}$$

- A partire da tale istante t^* in cui la condizione di puro rotolamento è soddisfatta, l'attrito (ammesso che sia presente) diventa statico. Siccome l'attrito statico è un'*incognita*, possiamo determinarlo dalle equazioni cardinali del corpo rigido
  - **moto traslatorio del CM** (per $t > t^*$)

$$\begin{aligned} M a_{CM} &= F^{ext} = F_{att.s} \\ &\Downarrow \\ a_{CM} &= \frac{F_{att.s}}{M} \end{aligned} \tag{38}$$

  - **moto rotatorio attorno al CM** (per $t > t^*$)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}'}{dt} &= \vec{M}^{att.s} \\ &\Downarrow \\ \frac{d(I\omega\,\hat{k})}{dt} &= R\,F_{att.s}\hat{k} \\ &\Downarrow \\ I\,\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{=\alpha}\,\hat{k} &= R\,F_{att.s}\hat{k} \\ &\Downarrow \\ \alpha &= \frac{F_{att.s}R}{I} \end{aligned} \tag{39}$$

  - Imponendo la condizione di **puro rotolamento**

$$a_{CM} = \alpha\,R \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{a_{CM}}{R} \tag{40}$$

  si ottiene

$$a_{CM} = \frac{F_{att.s}R^2}{I} \tag{41}$$

  e ricordando il momento d'inerzia (30) della sfera, si trova

$$a_{CM} = \frac{5}{2}\frac{F_{att.s}}{M} \tag{42}$$

Confrontando le equazioni (38) e (42) si trova

$$\begin{aligned} \frac{F_{att.s}}{M} &= \frac{5}{2}\frac{F_{att.s}}{M} \\ &\Downarrow \\ \frac{3}{2}\frac{F_{att.s}}{M} &= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

da cui

$$\boxed{F_{att.s} = 0 \qquad a_{CM} = 0 \qquad \alpha = 0} \qquad t \geq t^* \tag{44}$$

Pertanto otteniamo che:
- il moto è sì di puro rotolamento, ma avviene *senza alcuna forza di attrito*;
- il centro di massa prosegue di *moto rettilineo uniforme.*

Osservazioni:

(a) Possiamo comprendere il risultato (44) anche da un altro punto di vista. Se ci fosse una forza di attrito statico il centro di massa, che si muove secondo la legge $Ma_{CM} = F^{ext}$, rallenterebbe per effetto della forza di attrito statico e il moto sarebbe uniformemente decelerato, $a_{CM} < 0$ (anziché uniforme). Ma se il CM decelerasse, trattandosi di un moto di puro rotolamento, dalla condizione (40) ricaveremmo che la sua accelerazione angolare dovrebbe essere non nulla (negativa) e anche la velocità angolare della sfera dovrebbe dunque diminuire di pari passo. Pertanto l'energia meccanica della sfera (energia cinetica traslazionale + energia cinetica rotazionale) diminuirebbe nel tempo. Ma nel moto di puro rotolamento l'energia meccanica in realtà si conserva. Arriveremmo dunque ad un assurdo. Ne deduciamo che non ci può essere alcuna forza di attrito statico.

(b) In altri problemi (ad esempio quello del disco che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato) abbiamo visto che il moto di puro rotolamento era invece proprio dovuto alla forza di attrito statico. La ragione per cui qui le cose vanno diversamente è che in quei problemi il disco parte da una velocità angolare iniziale nulla (e una velocità traslazionale iniziale nulla). E' proprio la forza d'attrito che, applicando un momento, fa iniziare a ruotare il disco, che altrimenti non avrebbe alcuna ragione per ruotare. Al contrario, qui la sfera inizia già il suo moto di puro rotolamento con una velocità angolare non nulla e con una velocità di traslazione non nulla, che sono bilanciate proprio in modo da garantire che $v_{CM} = \omega R$. Quindi la sfera non ha bisogno di un ulteriore momento per ruotare. Anzi, esso farebbe variare la velocità angolare.

(c) Sappiamo che a $t = t^*$ la condizione di puro rotolamento è soddisfatta per definizione stessa di t^*. Ma perché la sfera effettua un moto di puro rotolamento ($\leftrightarrow$ il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme) anche *dopo* tale istante?
Intuitivamente possiamo capire che, per $t > t^*$, lo stato di moto con velocità traslazionale costante $v(t) \equiv v^*$ e velocità angolare costante $\omega(t) \equiv \omega^*$ rappresenta il compromesso naturale tra i due fenomeni che avvengono *prima* di t^*, in cui la velocità traslazionale decresce e la velocità angolare cresce (vedi Fig.1). Ora, per $t < t^*$ l'energia meccanica della sfera ha il seguente andamento temporale

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{1}{2}Mv_{CM}^2(t) + \frac{1}{2}I\omega^2(t) = \\ &= \frac{1}{2}M\left(\frac{J}{M} - \mu_D g\, t\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_D g}{R}\, t\right)^2 = \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots = \\ &= \frac{5}{14}\frac{J^2}{M} + \frac{7}{4}M(\mu_D g)^2(t-t^*)^2 \end{aligned} \tag{45}$$

con t^* dato dalla (34). Si tratta di un andamento parabolico nel tempo in cui t^* (vedi Eq.(34)) è l'istante in cui l'energia meccanica assume il minimo valore, come mostrato in Fig.2.
Pertanto, se per $t > t^*$ il moto continuasse ad essere di rotolamento con strisciamento seguendo le leggi (22) e (32), l'energia meccanica crescerebbe nuovamente (e indefinitamente), cosa impossibile. Invece, se per $t > t^*$ il moto si trasforma in puro rotolamento, l'energia meccanica si conserva e può mantenere il suo valore minimo [vedi Fig.2].

(d) Possiamo anche calcolare l'energia meccanica dissipata durante la fase di rotolamento con strisciamento ($0 < t < t^*$). Possiamo procedere in due modi:

– **Primo modo: teorema dell'energia cinetica**
Dopo che l'impulso è stato applicato l'unica forza che agisce sulla sfera è la forza

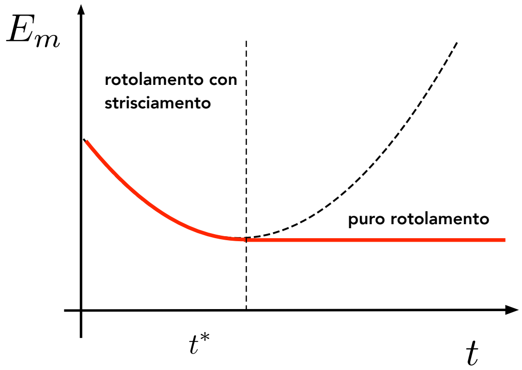


Figure 2: per $t < t^*$ il moto è di rotolamento con strisciamento e l'energia meccanica diminuisce, mentre per $t > t^*$ il moto è di puro rotolamento e l'energia meccanica rimane costante

di attrito dinamico (non conservativa). Per il teorema dell'energia cinetica

$$\begin{aligned}
W_{att.d} &= \Delta E_K = E_K(t^*) - E_K(0^+) = \\
&= \frac{1}{2}Mv^{*2} + \frac{1}{2}I\omega^{*2} \; - \left(\frac{1}{2}Mv_{CM}^2(0^+) + \frac{1}{2}I\omega^2(0^+)\right) = \\
&\quad \text{[uso la (36), (37) e (10), (17)]} \\
&= \frac{1}{2}M\left(\frac{5}{7}v_{CM}(0^+)\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\left(\frac{5}{7}\frac{v_{CM}(0^+)}{R}\right)^2 \; - \frac{1}{2}Mv_{CM}^2(0^+) - 0 = \\
&= \left(\frac{25}{49} + \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{49} \; - 1\right)\frac{1}{2}Mv_{CM}^2(0^+) = \\
&= \left(\frac{25}{49} + \frac{10}{49} \; - \frac{49}{49}\right)\frac{1}{2}Mv_{CM}^2(0^+) = \\
&= -\frac{14}{49}\cdot\frac{1}{2}Mv_{CM}^2(0^+) =
\end{aligned} \tag{46}$$

Infine, ricordando la (10), si ha

$$\boxed{W_{att.d} = -\frac{1}{7}\frac{J^2}{M}} \tag{47}$$

– **Secondo modo: calcolo diretto**
Il lavoro della forza di attrito dinamico si può anche calcolare direttamente. A tale scopo, tuttavia, occorre tener presente quanto osservato in precedenza, ossia che la forza di attrito statico fa due cose. Da un lato rallenta la velocità del centro di massa, facendo dunque diminuire la sua energia cinetica traslazionale, dall'altro applica un momento e fa aumentare la velocità rotazionale della sfera, aumentando la sua energia cinetica rotazionale. In generale il lavoro compiuto da una forza esterna su un corpo rigido che si muove con asse parallelo (la sfera ruota attorno ad un asse z che è sempre diretto perpendicolarmente a questo foglio) è dato da

$$W_{att.d} \;=\; \underbrace{\int_A^B \vec{F}_{att.d}\cdot d\vec{s}_{CM}}_{\text{lavoro traslazionale}} + \underbrace{\int_{\theta_A}^{\theta_B} M^z_{att.d}\, d\theta}_{\text{lavoro rotazionale}} \tag{48}$$

dove A e B sono le posizioni iniziale e finale del CM e θ_A e θ_B gli angoli iniziale e finale di rotazione (rispetto ad un sistema solidale col CM).

Calcoliamo questi due contributi. Il lavoro traslazionale è dato da

$$\begin{aligned}
W^{trasl}_{att.d} &= \int_A^B \vec{F}_{att.d} \cdot d\vec{s}_{CM} = \\
&= \vec{F}_{att.d} \cdot \underbrace{\int_A^B d\vec{s}_{CM}}_{=\Delta\vec{s}_{CM}} = \\
&= \underbrace{\vec{F}_{att.d} \cdot \Delta\vec{s}_{CM}}_{\text{discordi}} = \\
&= -\mu_D M g \Delta x_{CM} \qquad (49)
\end{aligned}$$

Lo spostamento Δx_{CM} del centro di massa tra $t = 0$ e $t = t^*$ è calcolato facilmente tenendo conto che compie un moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\begin{aligned}
\Delta x_{CM} &= x_{CM}(t^*) - x_{CM}(0) = \\
&= x_{CM}(0) + v_{CM}(0^+)\, t^* + \frac{1}{2}(-\mu_D g)t^{*2} - x_{CM}(0) = \\
&\quad \text{[uso (34) e la (10)]} \\
&= \frac{J}{M} \cdot \frac{2}{7}\frac{J}{\mu_D M g} - \frac{1}{2}\mu_D g \left(\frac{2}{7}\frac{J}{\mu_D M g}\right)^2 = \\
&= \frac{2}{7}\frac{J^2}{\mu_D M^2 g} - \frac{2}{49}\frac{J^2}{\mu_D M^2 g} = \\
&= \frac{12}{49}\frac{J^2}{\mu_D M^2 g} \qquad (50)
\end{aligned}$$

che, sostituito nella'Eq.(49), dà

$$W^{trasl}_{att.d} = -\frac{12}{49}\frac{J^2}{M} < 0 \quad \text{(lavoro negativo)} \qquad (51)$$

Come si vede, il lavoro traslazionale è negativo e dissipa l'energia cinetica traslazionale. Per quanto riguarda il lavoro rotazionale, si ha

$$\begin{aligned}
W^{rotaz}_{att.d} &= \int_{\theta_A}^{\theta_B} M^z_{att.d}\, d\theta = \\
&= \int_0^{t^*} M^z_{att.d} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\omega(t)} dt = \text{[uso Eq.(32)]} \\
&= \int_0^{t^*} R|F_{att.d}|\, \omega(t)\, dt = \\
&= \int_0^{t^*} R\mu_D M g \left(\frac{5}{2}\frac{\mu_D g}{R}\, t\right) dt = \\
&= \frac{5}{2} M(\mu_D g)^2 \int_0^{t^*} t\, dt = \\
&= \frac{5}{2} M(\mu_D g)^2 \frac{1}{2} t^{*2} = \\
&\quad \text{[uso Eq.(34)]} \\
&= \frac{5}{4} M(\mu_D g)^2 \left(\frac{2}{7}\frac{J}{\mu_D M g}\right)^2
\end{aligned}$$

ossia

$$W_{att.d}^{rotaz} = +\frac{5}{49}\frac{J^2}{M} \; > 0 \;\; \text{(lavoro positivo)} \tag{52}$$

Come si vede, il lavoro rotazionale è positivo e aumenta l'energia cinetica rotazionale della sfera.

Sommando i due contributi di lavoro si ha

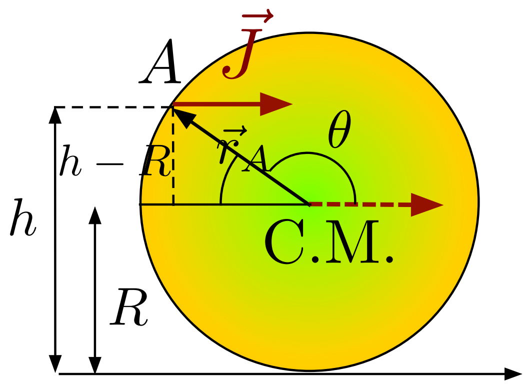
$$\begin{aligned} W_{att.d} &= W_{att.d}^{trasl} + W_{att.d}^{trasl} = \\ &= -\frac{12}{49}\frac{J^2}{M} + \frac{5}{49}\frac{J^2}{M} = \\ &= -\frac{1}{7}\frac{J^2}{M} \end{aligned} \tag{53}$$

che coincide con il risultato (47) ricavato precedentemente.

2. **PUNTO A ALL'ALTEZZA SPECIFICA**
Vogliamo ora determinare a quale altezza specifica h occorre applicare l'impulso affinché il moto risulti da subito di puro rotolamento. A tale scopo sfruttiamo le equazioni generali (10) e (16).

- Osserviamo innanzitutto che, se vogliamo un moto di puro rotolamento, occorre necessariamente che sia $h > R$. Infatti solo in tale caso il colpo impartisce una velocità angolare in senso orario, ossia compatibile con la velocità traslazionale verso destra del CM per un moto di puro rotolamento, mentre per $0 < h < R$ la velocità angolare è in senso anti-orario e non può essere compatibile con la velocità traslazionale del moto traslatorio.

- Tenendo conto di ciò, calcoliamo il prodotto vettoriale presente al membro sinistro nell'Eq.(16), trasportando come sempre parallelamente i due vettori in modo che abbiano la coda coincidente. Indicando come prima
$$\hat{k} = \text{versore entrante} \tag{54}$$
si ha
$$\begin{aligned} \vec{r}_A \times \vec{J} &= |\vec{r}_A|\,|\vec{J}|\sin\theta\;\hat{k} = \\ &= R\,J\sin(\pi-\theta)\;\hat{k} = \\ &= R\,J\frac{h-R}{R}\;\hat{k} \end{aligned}$$
ossia
$$\vec{r}_A \times \vec{J} = J(h-R)\;\hat{k} \tag{55}$$



Dall'Eq.(16) otteniamo
$$\begin{aligned} J(h-R)\;\hat{k} &= I\omega(0^+)\,\hat{k} \\ &\Downarrow \quad \text{[uso Eq.(30)]} \\ J(h-R) &= \frac{2}{5}MR^2\omega(0^+) \end{aligned}$$
e dunque
$$\omega(0^+) = \frac{5}{2}\frac{J\,(h-R)}{MR^2} \tag{56}$$

- Imponendo che la condizione di puro rotolamento sia soddisfatta da subito, deve valere che
$$v_{CM}(0^+) = \omega(0^+)\,R \tag{57}$$

e tenendo conto della (10), si ha

$$\begin{aligned} \frac{J}{M} &= \frac{5}{2}\frac{J\,(h-R)}{MR} \\ &\Downarrow \\ \frac{2}{5} &= \frac{(h-R)}{R} \\ &\Downarrow \\ h &= (1+\frac{2}{5})R \end{aligned} \tag{58}$$

ossia

$$\boxed{h = \frac{7}{5}R} \tag{59}$$

Osserviamo che tale altezza è *indipendente* dall'intensità J dell'impulso applicato.