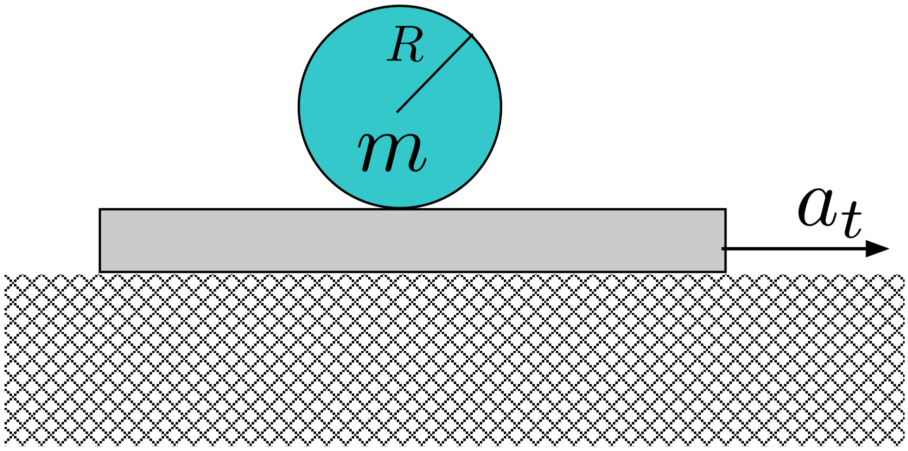
Esercizio (tratto dall'Esempio 6.22 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Una piattaforma avanza con accelerazione $a_t = 3\,\mathrm{m/s}$. Su di essa è appoggiato un cilindro di massa m e raggio R. Nell'ipotesi che il cilindro rotoli senza strisciare sulla piattaforma, calcolare

1. l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del cilindro rispetto al suolo;
2. l'accelerazione a' del centro di massa del cilindro rispetto alla piattaforma;
3. il valore minimo del coefficiente di attrito statico.



SUGGERIMENTO per la SOLUZIONE

1. **Soluzione nel sistema del suolo**
   Iniziamo con un'osservazione

   - Di solito la condizione di puro rotolamento si esprime dicendo che

     $$\omega = \frac{v}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{a}{R} \tag{1}$$

     dove α è l'accelerazione angolare (rotazione attorno al CM) e a l'accelerazione del CM rispetto al laboratorio (moto traslatorio del CM). La condizione di rotolamento usuale (3) deriva dall'imporre che il punto del cilindro (o cilindro, anello) che realizza il contatto col piano sia *fermo*, rispetto al sistema del laboratorio:

     $$\begin{aligned} \underbrace{\vec{v}_c}_{=0} &= \vec{v}_{\rm CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \\ &\Downarrow \\ -\vec{v}_{\rm CM} &= \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \end{aligned} \tag{2}$$

     da cui si vede che, essendo $|\vec{r}\,'| = R$, si ha

     $$|\vec{v}_{\rm CM}| = |\omega| R \tag{3}$$

   - Il problema che dobbiamo considerare, tuttavia, è un po' diverso da quelli in cui un cilindro (o disco o anello) rotola lungo un piano, in quanto qui il piano su cui si trova il cilindro è in movimento. Pertanto, affinché ci sia moto di puro rotolamento occorre imporre che il punto del cilindro (o disco o anello) che realizza il contatto col ripiano sia fermo rispetto al ripiano sui cui giace, ossia che abbia la *stessa* velocità del piano rispetto al sistema laboratorio.

     $$\begin{aligned} \underbrace{\vec{v}_c}_{=\vec{v}_t} &= \vec{v}_{\rm CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \\ &\Downarrow \\ \vec{v}_t - \vec{v}_{\rm CM} &= \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \end{aligned} \tag{4}$$

     dove v_t è la velocità del ripiano rispetto al sistema del Laboratorio. Di nuovo, essendo $|\vec{r}\,'| = R$, si ha

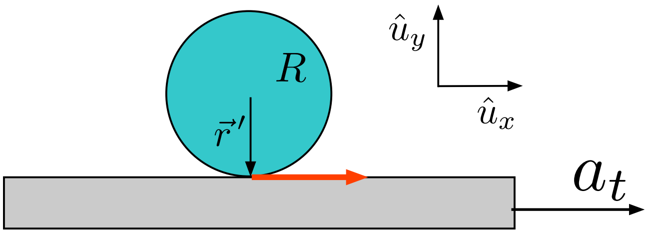
     $$|\vec{v}_t - \vec{v}_{\rm CM}| = |\omega| R \tag{5}$$

     Di fatto, dunque, confrontando la (5) e la (3), si vede che in questo caso il termine $|\vec{v}_t - \vec{v}_{\rm CM}|$ sostituisce il termine $|\vec{v}_{\rm CM}|$ del caso usuale.

   - La direzione del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ è quella dell'asse di rotazione, ossia perpendicolare a questo foglio. Occorre ora fare attenzione al verso di rotazione. Se il verso di $\vec{\omega}$ è uscente la rotazione avviene in verso anti-orario, mentre se il verso di ω è entrante la rotazione avviene in verso orario. Per conoscere il verso di $\vec{\omega}$, indichiamo con $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$ i versori verso destra e verso l'alto, come indicato in figura, ed il versore $\hat{u}_z = \hat{u}_x \times \hat{u}_y$ è uscente. Indichiamo

     $$\vec{\omega} = \omega\, \hat{u}_z \qquad\qquad \hat{u}_z = \text{versore uscente} \tag{6}$$

     dove:



$\omega > 0$ indica una rotazione in verso anti-orario;
$\omega < 0$ indica una rotazione in verso orario.

Se sostituiamo la (6) nell'Eq.(4) e ricordiamo che $\vec{r}\,' = -R\hat{u}_y$ e che $\vec{v}_t - \vec{v}_{CM} = (v_t - v_{CM})\hat{u}_x$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_t - \vec{v}_{\mathrm{CM}} &= \omega \hat{u}_z \times (-R\hat{u}_y) \\
&\Downarrow \\
(v_t - v_{\mathrm{CM}})\hat{u}_x &= -\omega R \underbrace{(\hat{u}_z \times \hat{u}_y)}_{=-\hat{u}_x} \\
&\Downarrow \\
(v_t - v_{\mathrm{CM}})\hat{u}_x &= \omega R\, \hat{u}_x
\end{aligned}
$$

da cui

$$\boxed{v_t - v_{\mathrm{CM}} = \omega R} \tag{7}$$

o equivalentemente

$$\boxed{\omega = \frac{v_t - v_{\mathrm{CM}}}{R}} \tag{8}$$

L'Eq.(8) ottenuta dice che:

- se il centro di massa del cilindro si muovesse (rispetto al laboratorio) con la stessa velocità della piattaforma ($v_{CM} = v_t$), il cilindro non avrebbe alcuna ragione per rotolare.
- quando il CM del cilindro 'rimane indietro' rispetto alla piattaforma (ossia quando $v_{CM} < v_t$) il cilindro è costretto a rotolare, ed $\omega > 0$ (ossia il cilindro ruota nel verso anti-orario). Pertanto il moto rotatorio del cilindro (e dunque la velocità angolare ω rispetto al CM) è legato *non* alla velocità *assoluta* v_{CM} del CM rispetto al laboratorio, ma alla velocità *relativa* $v_t - v_{CM}$ tra centro di massa e piattaforma.

• Dato che l'Eq.(8) vale istante per istante, prendendone la derivata rispetto al tempo si ottiene

$$\alpha = \frac{a_t - a_{CM}}{R} \tag{9}$$

• Occorre anche notare che qui la forza di attrito F_{att} è diretta lungo il moto (verso destra), perché è proprio la forza che la piattaforma esercita sul cilindro per trascinarselo. E' l'unica forza che agisce sul cilindro, e il CM si muove verso destra (rispetto al laboratorio) con la legge

$$F_{\mathrm{att}} = m a_{CM} \tag{10}$$

La direzione di F_{att} è consistente con la direzione di rotolamento (antiorario) del cilindro, in quanto una forza $\vec{F}_{\mathrm{att}}$ diretta verso destra esercita un momento $\vec{M} = \vec{r}\,' \times \vec{F}_{att}$ uscente dal foglio. E' proprio tale momento che fa ruotare il cilindro in senso antiorario

$$F_{\mathrm{att}}\, R = I\alpha \tag{11}$$

Uguagliando le equazioni (10) e (11), e usando l'Eq.(9), si ottiene

$$ma_{CM} = \frac{I}{R}\frac{a_t - a_{CM}}{R} \tag{12}$$

da cui possiamo ricavare il risultato

$$a_{CM} = \frac{\frac{I}{mR^2}}{1 + \frac{I}{mR^2}} a_t \tag{13}$$

- Ricordando che per un cilindro $I = \frac{1}{2}mR^2$, si ha $\frac{I}{mR^2} = \frac{1}{2}$ e dunque lEq.(13) dà

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} a_t = \\ &= \frac{a_t}{3} = \\ &= \frac{3\,\mathrm{m/s^2}}{3} = \\ &= 1\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned} \tag{14}$$

2. **Soluzione nel sistema della piattaforma**

- Un altro modo equivalente per risolvere il problema è quello di mettersi nel sistema della piattaforma. Questo ha il vantaggio che ci si riconduce al caso più 'standard' in cui il piano su cui scorre il cilindro è fermo. Tuttavia occorre anche tener presente che la piattaforma si muove (rispetto al sistema inerziale del laboratorio) di moto uniformemente accelerato, e dunque il sistema della piattaforma *non* è un sistema inerziale. In tale sistema di riferimento, su qualunque corpo di massa m agisce, oltre alle forze reali, anche una forza *apparente* pari a $-ma_t$. Nel nostro caso, dunque, sul cilindro agisce una tensione $T' = -ma_t$ (applicata al suo CM); è importante notare che questa non è una tensione reale (non c'è nessuna fune che tira il cilindro) ma apparente, ossia dovuta al fatto che il sistema della piattaforma non è inerziale. Formalmente, però, tutto avviene come se tale tensione ci fosse e ci riconduciamo a risolvere il problema usuale di un cilindro che rotola su un piano fisso, tirato verso sinistra da una fune apparente, e su cui agisce una forza di attrito F_{att} verso destra. In tale situazione, scriveremo allora le equazioni

$$T' + F_{\mathrm{att}} = ma' \qquad \text{(moto traslatorio del CM)} \tag{15}$$

$$F_{\mathrm{att}}R = I\alpha = -I\frac{a'}{R} \qquad \text{(moto rotatorio attorno al CM)} \tag{16}$$

dove a' è l'accelerazione del CM del cilindro rispetto al sistema della piattaforma. Il segno '-' nella seconda equazione deriva semplicemente dalle convenzioni scelte per moto traslatorio e rotatorio. Qui abbiamo scelto che $a' > 0$ corrisponda al CM del cilindro che si muove verso destra, e che a $\alpha > 0$ corrisponda alla rotazione in senso antiorario. Quindi, siccome un cilindro che rotola in senso antiorario si muove verso sinistra, occorre aggiungere un segno '-' nel legame tra α e a'. Risolvendo (15) e (16) si ottiene

$$a' = -\frac{a_t}{1 + \frac{I}{mR^2}} \tag{17}$$

- Ricordando che per un cilindro $I = \frac{1}{2}mR^2$, si ha $\frac{I}{mR^2} = \frac{1}{2}$ e dunque l'Eq.(13) dà

$$a' = -2\,\mathrm{m/s^2} \tag{18}$$

- Avendo l'accelerazione (17) del CM del cilindro rispetto al sistema della piattaforma, possiamo ottenere ora l'accelerazione del cilindro rispetto al sistema del laboratorio attraverso la legge di composizione

$$\begin{aligned} a_{CM} &= a' + a_t = \\ &= \frac{\frac{I}{mR^2}}{1 + \frac{I}{mR^2}} a_t \end{aligned} \tag{19}$$

  che coincide con (13).

3. **Forza di attrito**
   Affinché il moto sia di puro rotolamento l'attrito $F_{\text{att}}\, R = I\alpha$ [vedi Eq.(11)] deve essere statico, ossia minore della forza di attrito statico *massima*

$$\begin{aligned} F_{att} &\leq F_{att}^{max} \\ &\Downarrow \\ m\, a_{CM} &\leq \mu_S\, mg \\ &\Downarrow \\ \mu_S &\geq \frac{a_{CM}}{g} \end{aligned} \tag{20}$$

   Pertanto, affinché il moto sia di puro rotolamento, il coefficiente di attrito statico *minimo* è

$$\mu_{min} = \frac{a_{CM}}{g} = \frac{1 \text{m/s}^2}{9.81\, \text{m/s}^2} = 0.1 \tag{21}$$