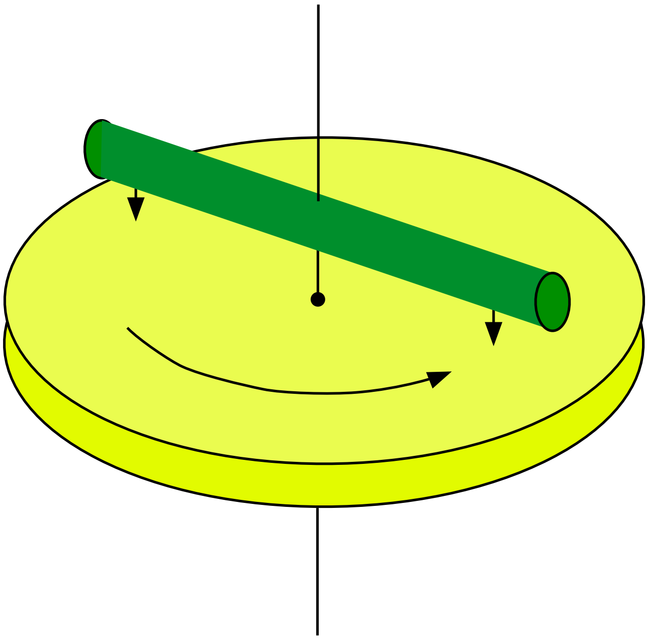
Esercizio **(tratto dal problema 7.36 del Mazzoldi 2)**

Un disco di massa $m_D = 2.4\,\mathrm{Kg}$ e raggio $R = 16\,\mathrm{cm}$ ruota attorno all'asse verticale passante per il centro con velocità angolare costante $\omega_1 = 10\,\mathrm{s}^{-1}$. All'istante $t = 0$ viene appoggiata sul disco un'asta (della stessa massa del disco e di lunghezza $d = 2R$), inizialmente in quiete. Tra il disco e l'asta c'è attrito e l'asta comincia a ruotare attorno allo stesso asse. Calcolare:



Calcolare:

1. la velocità angolare finale ω_2 del sistema;

2. il lavoro compiuto dalle forze di attrito;

Tra l'istante iniziale $t = 0$ (disco che ruota e asta ferma) e l'istante finale t_{fin} (entrambi ruotano con velocità angolare ω_2) intercorre un tempo $t = 3.8\,\mathrm{s}$. Calcolare:

3. il momento delle forze di attrito.

SOLUZIONE

1. Il sistema disco + asta è isolato perché tra disco ed asta si esercitano solo forze interne di attrito. Pertanto la quantità di moto ed il momento angolare del sistema si conservano, ossia rimangono costanti nel tempo.
   NB: L'energia meccanica del sistema disco + asta (che in questo caso coincide con l'energia cinetica) **non si conserva**, dato che le forze interne al sistema sono forze di attrito, che non sono conservative.

   Per determinare la velocità angolare finale ω_2 del sistema sfruttiamo il fatto le leggi di conservazione. La conservazione della quantita di moto non ci serve molto perché è nulla, in quanto il centro di massa del sistema rimane sempre fermo. Al contrario la conservazione del momento angolare del sistema è molto utile. Notiamo che il momento angolare del sistema è diretto lungo l'asse verticale z, e che esso si esprime, istante per istante, come

$$L_z = I\omega$$

   dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse z e ω la velocità angolare di rotazione. Pertanto, denotando con $t = 0$ l'istante iniziale (disco che ruota e asta ferma) e con $t = t_{fin}$ quello in cui disco e asta ruotano insieme con velocità angolare ω_2, la conservazione del momento angolare implica:

$$\begin{aligned} L_z(t=0) &= L_z(t=t_{fin}) \\ I_D\,\omega_1 &= (I_D + I_A)\,\omega_2 \end{aligned} \tag{1}$$

   da cui otteniamo

$$\omega_2 = \frac{I_D}{I_D + I_A}\omega_1 \tag{2}$$

   Ricordando ora che i momenti d'inerzia per un disco ed un'asta valgono

$$\begin{cases} I_D = \frac{1}{2} m_D\, R^2 \\ I_A = \frac{1}{12} m_A d^2 = \frac{1}{3} m_A\, R^2 \end{cases} \tag{3}$$

   otteniamo

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\frac{1}{2} m_D\, R^2}{\frac{1}{2} m_D\, R^2 + \frac{1}{3} m_A\, R^2}\omega_1 = \\ &= \frac{m_D}{m_D + \frac{2}{3} m_A}\omega_1 \end{aligned} \tag{4}$$

   Pertanto $\omega_2 > \omega_1$, come ci sia aspettava. Infatti il momento d'inerzia totale aumenta in seguito al contributo dell'asta, e dunque velocità angolare diminuisce affinché il momento angolare possa conservarsi.

   Sostituendo nell'espressione (4) i valori numerici dati, otteniamo

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{m_D}{m_D + \frac{2}{3} m_A}\omega_1 = \\ & \quad [\text{uso } m_D = m_A] \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}\omega_1 = \\ &= \frac{3}{5}\omega_1 \end{aligned} \tag{5}$$

Ricordando che $\omega_1 = 10\text{s}^{-1}$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{5}\,10\text{s}^{-1} = \\
&= 6\,\text{s}^{-1}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

NB: Il momento angolare si conserva anche per tutti gli instanti intermedi, ossia

$$L_z(t) = \text{cost} \qquad \forall t \tag{7}$$

Tuttavia, negli istanti intermedi tra $t = 0$ e t_{fin} il disco e l'asta non hanno la stessa velocità angolare. Negli istanti intermedi, infatti, il disco sta passando da ω_1 a ω_2 (la sua velocità angolare $\omega_D(t)$ diminuisce nel tempo), mentre l'asta passa gradualmente dallo stato di quiete $\omega = 0$ allo stato con velocità angolare ω_2 (la sua velocità angolare $\omega_A(t)$ sta aumentando nel tempo). E' solo a $t = t_{fin}$ che essi raggiungono la stessa velocità angolare ω_2. In generale, possiamo scrivere la conservazione del momento angolare come:

$$
\begin{aligned}
L_z(t=0) &= L_z(0 < t < t_{fin}) \quad = L_z(t_{fin}) \\
I_D\omega_1 &= I_D\omega_D(t) + I_A\omega_A(t) = (I_D + I_A)\omega_2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

2. Per calcolare il lavoro delle forze d'attrito possiamo sfruttare il teorema dell'energia cinetica

$$W = E_{K,fin} - E_{K,in} \tag{9}$$

dove W è il lavoro delle forze che agiscono sul sistema disco+asta; in questo caso le uniche forze che agiscono sul sistema sono appunto quelle mutue di attrito. Ricordando ora che l'energia cinetica di rotazione si scrive come

$$E_K = \frac{1}{2} I\,\omega^2$$

abbiamo

$$
\left\{
\begin{aligned}
E_{K,in} &= \tfrac{1}{2} I_D\,\omega_1^2 \\
E_{K,fin} &= \tfrac{1}{2}(I_D + I_A)\,\omega_2^2
\end{aligned}
\right.
\tag{10}
$$

Pertanto il lavoro delle forze di attrito vale:

$$
\begin{aligned}
W &= E_{K,fin} - E_{K,in} = \\
&= \frac{1}{2}(I_D + I_A)\,\omega_2^2 - \frac{1}{2} I_D\,\omega_1^2 = \\
&= [\text{uso ora (2)}] \\
&= \frac{1}{2}(I_D + I_A)\left(\frac{I_D}{I_D + I_A}\omega_1\right)^2 - \frac{1}{2} I_D\,\omega_1^2 = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{I_D^2}{I_D + I_A} - I_D\right)\omega_1^2 = \\
&= \frac{1}{2} I_D\omega_1^2\left(\frac{I_D}{I_D + I_A} - 1\right) = \\
&= -\underbrace{\frac{1}{2} I_D\omega_1^2}_{=E_{K,in}} \cdot \underbrace{\frac{I_A}{I_D + I_A}}_{\text{fattore di perdita}} \neq 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Da questa espressione si vede chiaramente che l'energia cinetica **non** si conserva, ossia $E_{K,fin} \neq E_{K,in}$. La differenza in energia cinetica è dovuta alle forze di attrito, che compiono un lavoro **negativo** [attraverso l'attrito l'asta si oppone al moto di rotazione del disco e lo frena, dato che la velocità angolare del disco passa gradualmente da ω_1 (a $t = 0$) a $\omega_2 < \omega_1$ (a $t = t_{fin}$).] In valore assoluto, il lavoro delle forze di attrito ammonta ad una percentuale $I_A/(I_D + I_A)$ dell'energia cinetica $E_{K,in}$ posseduta inizialmente dal disco.
Sostituendo in (11) le espressioni (3) per i momenti d'inerzia, otteniamo:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2}\frac{I_A I_D}{I_D + I_A}\,\omega_1^2 = && (12)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}m_A R^2\,\frac{1}{2}m_D R^2}{\frac{1}{2}m_D R^2 + \frac{1}{3}m_A R^2}\,\omega_1^2 = \\ & \quad [\text{uso } m_D = m_A] \\ &= -\frac{1}{6}\frac{m_D}{1+\frac{2}{3}}\,\omega_1^2 R^2 = \\ &= -\frac{m_D}{10}\,\omega_1^2 R^2 && (13) \end{aligned}$$

Sostituendo in (13) i dati riportati nel testo, otteniamo

$$\begin{aligned} W &= -\frac{2.4\,\mathrm{Kg}}{10}\,100\,\mathrm{s}^{-2}\,(0.16\mathrm{m})^2 = \\ &= -0.614\,\mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= -0.614\,\mathrm{J} && (14) \end{aligned}$$

3. Le forze di attrito che agiscono sul sistema disco+asta sono date dalle forze che l'asta esercita sul disco e dalle forze che il disco esercita sull'asta. Consideriamo le forze di attrito che l'asta esercita sul disco; dato che l'asta frena il disco, tali forze sono dirette come in figura 1(b); trattandosi di attrito dinamico possiamo dire che le forze sono costanti in modulo. Indichiamo con F tale modulo, applicato punto per punto lungo la linea di contatto disco-asta. La direzione della forza è lungo il piano del disco, ortogonalmente al vettore posizione che ne identifica il punto di applicazione rispetto al centro del disco. Si noti che, passando da una parte all'altra rispetto al centro del disco, il segno delle forze cambia, ma il momento da esse esercitate è sempre diretto nel medesimo verso (in basso) lungo la direzione z.

4. Le forze di attrito che agiscono sul sistema disco+asta sono date dalle forze che l'asta esercita sul disco e dalle forze che il disco esercita sull'asta.
   - Consideriamo le forze di attrito che l'asta esercita sul disco; tali forze sono applicate punto per punto lungo la linea di contatto disco-asta.
     - Dato che l'asta frena il disco, in ciascun punto di contatto la direzione della forza è lungo il piano del disco, ortogonalmente al vettore posizione che ne identifica il punto di applicazione rispetto al centro del disco, come mostrato in figura 1(b). Si noti che, passando da una parte all'altra rispetto al centro del disco, il segno delle forze cambia;
     - Il momento di tali forze, calcolato rispetto al centro del disco e dell'asta, è diretto lungo la direzione z, verso il basso. Si noti che passando da una parte all'altra rispetto al centro del disco il segno delle forze cambia, ma cambia anche il segno del braccio;

pertanto il segno del momento non cambia passando da una parte all'altra rispetto al centro del disco, ed è diretto lungo la direzione z verso il basso;

- Trattandosi di attrito dinamico possiamo dire che le forze di attrito che agiscono sul disco sono costanti nel tempo, e dunque anche il momento è costante nel tempo.

Pertanto abbiamo

M_D = momento delle forze che agiscono <u>sul</u> disco (esercitate dall'asta) è costante nel tempo

- Consideriamo ora le forze di attrito che il disco esercita sull'asta.
  - l'asta inizialmente è ferma, ma il disco inizia a farla ruotare trascinandola nel suo moto di rotazione. Pertanto tali forze sono dirette come in Fig.1(c);
  - Il momento di tali forze è dunque diretto lungo la direzione z verso l'alto;
  - Anche per tali forze di attrito sono costanti nel tempo.

  Pertanto

  M_A = momento delle forze che agiscono <u>sull'</u> asta (esercitate dal disco) è costante nel tempo

- Per il principio di azione e reazione, le forze che il disco esercita sull'asta sono uguali e contrarie a quelle che l'asta esercita sul disco, e dunque anche il momento M_A è uguale ed opposto al momento M_D;

$$M_{tot} = M_D + M_A = 0 \tag{15}$$

da cui segue la già citata conservazione del momento angolare totale

$$0 = M_{tot} = \frac{dL_{tot,z}}{dt} \qquad \Rightarrow L_{tot,z} = \text{cost} \tag{16}$$

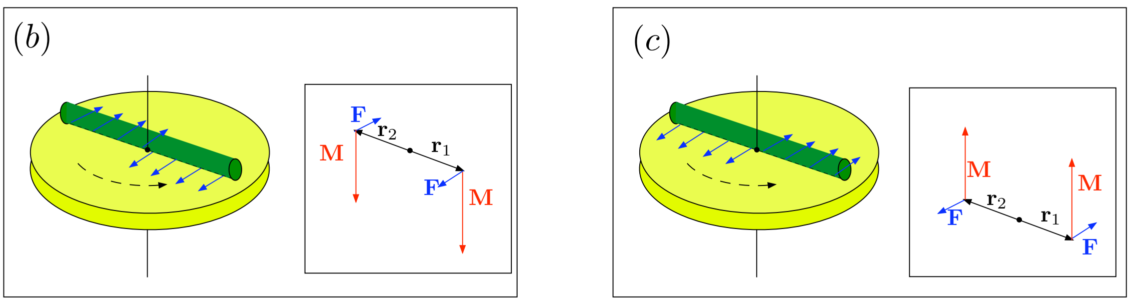


Figure 1: (b) le forze (e i loro momenti) che l'asta esercita sul disco; (c) le forze (e i loro momenti) che il disco esercita sull'asta.

D'altra parte, dalle equazioni del moto rotatorio di ciascun corpo rigido (disco e asta) abbiamo che

$$M_D = \frac{dL_{D,z}}{dt} = I_D\,\alpha_D \tag{17}$$

$$M_A = \frac{dL_{A,z}}{dt} = I_A\,\alpha_A \tag{18}$$

dove α_D e α_A sono le accelerazioni angolari del disco e dell'asta rispettivamente. Notiamo che, essendo M_D e M_A costanti nel tempo, anche α_D e α_A sono costanti nel tempo, ossia il disco e l'asta si muovono di moto circolare uniformemente accelerato.

Combinando la (16) con le (17) e (18), otteniamo dunque la relazione tra le accelerazioni angolari di disco e asta

$$0 = M_{tot} = M_D + M_A = I_D\,\alpha_D + I_A\,\alpha_A$$

[che non è altro che la derivata temporale dell'Eq.(8)], da cui si ottiene

$$\alpha_D = -\frac{I_A}{I_D}\alpha_A \tag{19}$$

Tenendo conto che a $t = 0$ il disco ruota con velocità angolare ω_1 e l'asta è ferma, le velocità angolari di disco e asta variano nel tempo seguendo le leggi orarie

$$\begin{cases} \omega_D(t) = \omega_1 + \alpha_D t \\ \omega_A(t) = \alpha_A t \end{cases} \quad \text{(moto circolare unif. accelerato)} \tag{20}$$

come mostrato in Fig.2. Sappiamo che all'istante t_{fin} le due velocità angolari sono uguali:

$$\omega_D(t_{fin}) = \omega_A(t_{fin}) = \omega_2 \tag{21}$$

Sostituendo le leggi orarie ricaviamo che

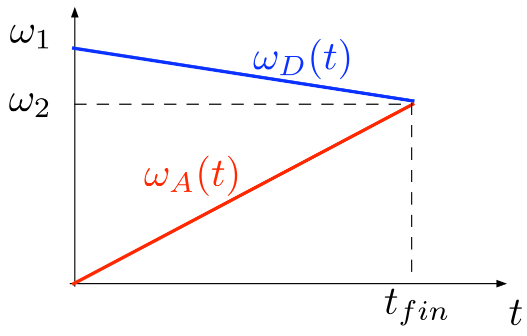


Figure 2: Le leggi orarie delle velocità angolari del disco e dell'asta. Il disco parte da una velocità angolare ω_1 e rallenta, fino a raggiungere il valore ω_2 in un tempo t_{fin}. Nel contempo l'asta parte da ferma e accelera angolarmente, fino a raggiungere anch'essa il valore ω_2.

$$\omega_1 + \alpha_D t_{fin} = \alpha_A t_{fin} = \omega_2 \tag{22}$$

da cui ricaviamo che

$$\alpha_A = \frac{\omega_2}{t_{fin}} \tag{23}$$

Ricordando (5), possiamo esprimere α_A in termini dei dati iniziali

$$\alpha_A = \frac{3}{5}\frac{\omega_1}{t_{fin}} \tag{24}$$

Sostituendo (24) in (18) otteniamo:

$$\begin{aligned} M_A &= I_A\,\alpha_A = \\ &= \frac{1}{3} m_A R^2\,\frac{3}{5}\frac{\omega_1}{t_{fin}} = \\ &= \frac{1}{5} m_A R^2\,\frac{\omega_1}{t_{fin}} \end{aligned} \tag{25}$$

Sostituendo i dati numerici si ottiene

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{1}{5}\,2.4\,\mathrm{Kg}\,(0.16\,\mathrm{m})^2\,\frac{10\,\mathrm{s}^{-1}}{3.8\,\mathrm{s}} = \\ &= 0.032\,\mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 0.032\,\mathrm{N\,m} \end{aligned} \tag{26}$$

Ricordando (15) abbiamo

$$M_D = -M_A = -0.032\,\mathrm{N\,m} \tag{27}$$

Osservazione
Esiste anche un'altra maniera per calcolare il lavoro delle forze di attrito, ossia dall'espressione

$$\begin{aligned} W &= \int M\,d\theta = \\ &= \int M_D\,d\theta_D + \int M_A\,d\theta_A = \\ &\quad [\text{siccome } M_{A/D} \text{ sono in questo caso costanti}] \\ &= M_D\Delta\theta_D + M_A\Delta\theta_A = \\ &\quad [\text{uso la (15)}] \\ &= M_A(\Delta\theta_A - \Delta\theta_D) \end{aligned} \tag{28}$$

dove $\Delta\theta_D$ e $\Delta\theta_A$ sono gli angoli spazzati rispettivamente dal disco e dall'asta a partire dall'istante $t = 0$ fino all'istante t_{fin}. Questi ultimi si deducono dalle semplici formule del moto circolare uniformemente accelerato compiuto dal disco e dall'asta

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\theta_D &= \omega_1 t_{fin} + \tfrac{1}{2}\alpha_D t_{fin}^2 \\ \Delta\theta_A &= \tfrac{1}{2}\alpha_A t_{fin}^2 \end{aligned} \right. \quad \text{(moto circolare unif. accelerato)} \tag{29}$$

Tali valori non sono altro che le aree sottese dalla legge oraria delle velocità angolari, ossia le aree del trapezio e del triangolo mostrati in Fig.2. Sostituendo (25) e (29) in (28) si ottiene

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \frac{\omega_1}{t_{fin}} \left(\frac{1}{2} \alpha_A t_{fin}^2 - \omega_1 t_{fin} - \frac{1}{2} \alpha_D t_{fin}^2 \right) \\
& \quad \text{[semplifico per } t_{fin} \text{ e uso (19)]} \\
&= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \omega_1 \left(\frac{1}{2} \alpha_A t_{fin} - \omega_1 + \frac{1}{2} \frac{I_A}{I_D} \alpha_A t_{fin} \right) \\
&= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \omega_1 \left(\frac{1}{2} \alpha_A t_{fin} \left(1 + \frac{I_A}{I_D} \right) - \omega_1 \right) \\
& \quad \text{[uso (24)]} \\
&= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \omega_1 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{5} \omega_1 \left(1 + \frac{I_A}{I_D} \right) - \omega_1 \right) \\
&= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \omega_1^2 \left(\frac{3}{10} \left(1 + \frac{I_A}{I_D} \right) - 1 \right) \\
&= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \omega_1^2 \left(\frac{3}{10} \left(1 + \frac{\frac{1}{3} m_A R^2}{\frac{1}{2} m_D R^2} \right) - 1 \right) \\
& \quad \text{[uso } m_D = m_A \text{]} \\
&= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \omega_1^2 \left(\frac{3}{10} \left(1 + \frac{2}{3} \right) - 1 \right) \\
&= \frac{1}{5} m_A R^2 \, \omega_1^2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\
&= -\frac{1}{10} m_A R^2 \, \omega_1^2 \\
&= -\frac{m_D}{10} R^2 \, \omega_1^2 \qquad (30)
\end{aligned}$$

che coincide con l'espressione (13) determinata nel primo modo.