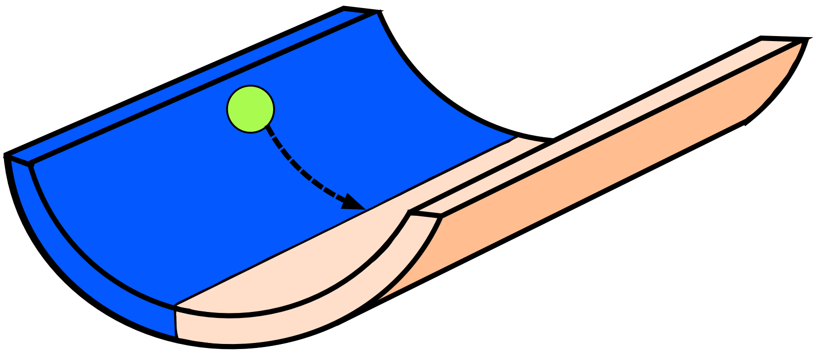
## Esercizio (tratto dall'Esempio 6.19 p.219 del Mazzoldi)

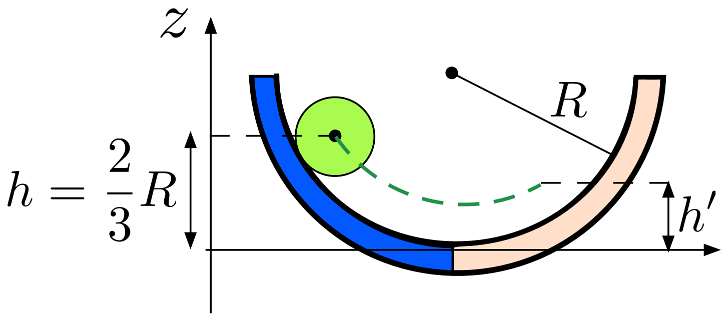
Una guida a sezione semicircolare di raggio $R$ è composta da due parti: la metà a sinistra è scabra, mentre la metà a destra è perfettamente liscia e priva di attrito. All'istante $t = 0$ una sfera (piena) di raggio $R/4$ e massa $m$ è posta sulla parte sinistra della guida e il suo baricentro si trova ad un'altezza $h = (2/3)R$ rispetto al fondo della guida. La sfera viene lasciata cadere con velocità iniziale nulla e rotola senza strisciare sotto l'azione della forza peso (vedi figura).

1. calcolare la velocità del centro di massa della sfera quando essa giunge nel punto piú basso della guida.

Dopo aver superato il piú basso della guida, la sfera prosegue il suo moto nella parte destra priva di attrito.

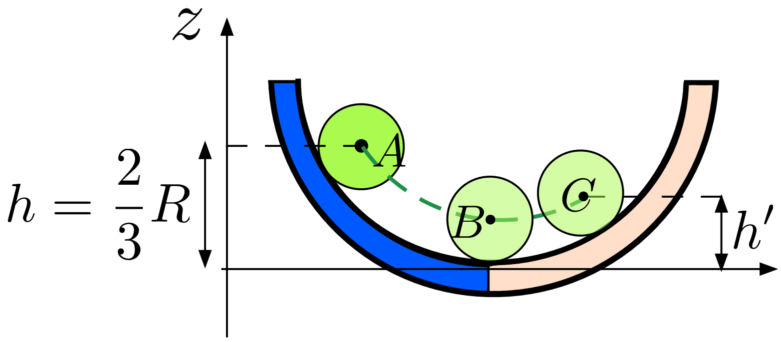
2. calcolare l'altezza massima $h'$ che il centro di massa della sfera raggiunge nella parte destra della guida.






**Fabrizio Dolcini (http://staff.polito.it/fabrizio.dolcini/)**
**Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino - Esercitazioni di Fisica I**

**SOLUZIONE**
Denotiamo con A il punto iniziale, con B il punto piú basso della guida, e con C il punto piú in alto raggiunto nella parte liscia (a destra) della guida.




1. Nella prima parte del moto ($A \to B$, parte sinistra della guida) la sfera rotola senza strisciare fino al punto più basso della guida. Osserviamo che la sfera rotola *in virtù della forza di attrito*. Ciononostante, possiamo applicare la conservazione dell'energia. Infatti tale forza di attrito, che si esercita nel punto di contatto, non compie lavoro perché nel caso di puro rotolamento il punto di contatto è sempre istantaneamente fermo. Pertanto istante per istante il punto di contatto non si sposta ($d\vec{r} = 0$) e
$$W_{\text{att}} = \int \vec{F}_{\text{att}} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{=0} = 0 \tag{1}$$
In conclusione la variazione di energia meccanica
$$\delta E_m = W_{\text{att}} = 0 \tag{2}$$
è nulla, ossia l'energia meccanica si conserva, e possiamo scrivere
$$E_m^A = E_m^B$$
dove l'energia iniziale è data dalla sola energia potenziale
$$E_m^A = E_p = mg\,\frac{2}{3}R \tag{3}$$
e quella nel punto B (ossia nel punto piú basso della guida) consta dell'energia potenziale, dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione rispetto al centro di massa
$$E_m^B = mg\,\frac{R}{4} + \frac{1}{2}mv_{\text{CM},B}^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 \tag{4}$$
dove $I$ è il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse passante per il suo centro, e $\omega_B$ la velocità angolare in $B$. Imponendo la condizione di rotolamento senza strisciamento
$$\omega_B = \frac{v_{\text{CM},B}}{\frac{R}{4}} \tag{5}$$

e ricordando che il momento d'inerzia della sfera è

$$I = \frac{2}{5} m (R/4)^2 \tag{6}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} mg\,\frac{2}{3}R &= mg\,\frac{R}{4} + \frac{1}{2} m v_{\mathrm{CM},B}^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} m \left(\frac{\cancel{R}}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_{\mathrm{CM},B}}{\frac{\cancel{R}}{4}}\right)^2 \\ &\Downarrow \\ mgR\,\underbrace{(\frac{2}{3} - \frac{1}{4})}_{=\frac{5}{12}} &= m v_{\mathrm{CM},B}^2 \underbrace{(\frac{1}{2} + \frac{1}{5})}_{=\frac{7}{10}} \end{aligned} \tag{7}$$

e dunque

$$v_{\mathrm{CM},B} = \sqrt{gR\,\frac{25}{42}} \tag{8}$$

La velocità angolare è

$$\begin{aligned} \omega_B &= \frac{v_{\mathrm{CM},B}}{\frac{R}{4}} = \\ &= 4\sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{25}{42}} \end{aligned} \tag{9}$$

Notiamo che nel passare da $A$ a $B$ la sfera trasforma parte dell'energia potenziale iniziale in energia cinetica sia di traslazione che di rotazione.

2. Nella seconda parte del moto ($B \to C$, parte destra della guida) la sfera non incontra nessuna forza di attrito e dunque la sua energia meccanica continua a rimanere costante.
Osserviamo in particolare che, venendo meno la forza di attrito, il momento delle forze rispetto al centro di massa è nullo (la reazione vincolare della guida non applica nessun momento). Pertanto la velocità angolare $\omega$ rimane invariata rispetto al valore $\omega_B$ che aveva al punto più basso della guida:

$$\omega(t) \equiv \text{const} = \omega_B \qquad \text{per tutto il moto da } B \to C \to B \tag{10}$$

L'aumento dell'energia potenziale dovuta alla risalita va dunque a discapito della *sola* energia cinetica del centro di massa, che si annulla al punto piú alto raggiunto a destra. La conservazione dell'energia meccanica dà quindi

$$E_m^A = E_m^B = E_m^C \tag{11}$$

e dunque

$$mg\,\frac{2}{3}R = mgh' + \frac{1}{2} I \omega_C^2 \qquad \text{con } \omega_C = \omega_B \tag{12}$$

Dividendo per $mg$

$$h' = \frac{2}{3}R - \frac{1}{2}\frac{I}{mg}\,\omega_B^2 \tag{13}$$

Sostituendo ora il valore (9) di $\omega_B$, ed il momento d'inerzia (6), otteniamo

$$\begin{aligned} h' &= \frac{2}{3}R - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} m \frac{R^2}{16}\right) \frac{1}{mg}\, 16\, \frac{g}{R}\, \frac{25}{42} = \\ &= \frac{2}{3}R - \frac{5}{42}R = \\ &= \frac{28 - 5}{42}\, R = \\ &= \frac{23}{42}\, R \end{aligned} \tag{14}$$

che è ovviamente minore rispetto all'altezza iniziale $h = (2/3)R$.

**Nota Bene:**
Quando la sfera ridiscende da $C$ a $B$, continua a rotolare in senso *orario* (dato che non c'è attrito). Pertanto, giunta nuovamente nella parte scabra, non può più rotolare senza strisciare, dato che la velocità angolare e la velocità del CM sono discordi e la condizione di puro rotolamento non può essere soddisfatta. Il rotolamento comporta necessariamente uno strisciamento, che causa una dissipazione di energia. Dopo varie oscillazioni, la sfera si fermerà dunque nel fondo della guida.
Al contrario, se la guida fosse *completamente scabra*, la sfera continuerebbe indefinitamente a muoversi di moto di puro rotolamento (con conservazione dell'energia) e continuerebbe ad oscillare indefinitamente. Si noti quindi che, in maniera controintuitiva, à la presenza della metà liscia a fare dissipare l'energia della sfera.