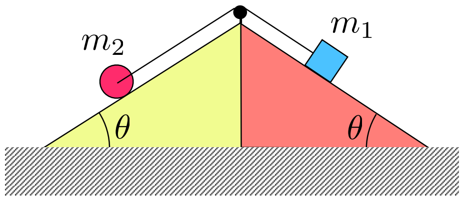
Esercizio (tratto dal problema 7.52 del Mazzoldi 2)

Un doppio piano è costituito da due rampe contrapposte, di materiali diversi, inclinate ciascuna di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sulla rampa di destra, che ha coefficienti di attrito statico e dinamico $\mu_{1,S}$ e $\mu_{1,D}$ rispettivamente, si trova un blocco di massa m_1 e dimensioni trascurabili, che può essere modellizzato come un punto materiale. Sulla rampa di sinistra, che ha coefficienti di attrito statico e dinamico $\mu_{2,S}$ e $\mu_{2,D}$, si trova un disco di massa m_2 e raggio R. I due oggetti sono collegati da un filo inestensibile, e si osserva che il disco scende con moto di puro rotolamento, mentre il blocco sale strisciando.



1. Quale delle seguenti affermazioni riguardanti il blocco m_1 è corretta ?
   (a) su m_1 agisce una forza di attrito f_{att} di modulo $\mu_{1,D}\, m_1 g \sin\theta$ lungo il piano;
   (b) su m_1 agisce una forza di attrito f_{att} di modulo $\mu_{1,D}\, m_1 g \cos\theta$ lungo il piano;
   (c) su m_1 agisce una forza di attrito f_{att} di modulo $\mu_{1,S}\, m_1 g \cos\theta$ lungo il piano;
   (d) su m_1 agisce una forza di attrito f_{att} di modulo $\mu_{1,S}\, m_1 g \sin\theta$ lungo il piano;
2. Quale delle seguenti affermazioni riguardanti il disco m_2 è corretta ?
   (a) su m_2 non agisce alcuna forza di attrito lungo il piano perché il moto del disco è di puro rotolamento;
   (b) su m_2 agisce una forza di attrito F_{att} di modulo $\mu_{2,D}\, m_2 g \cos\theta$ lungo il piano;
   (c) su m_2 agisce una forza di attrito F_{att} lungo il piano;
   (d) su m_2 agisce una forza di attrito F_{att} di modulo $\mu_{2,S}\, m_2 g \cos\theta$ lungo il piano;
3. Disegnare le forze che agiscono sul blocco m_1 e scrivere la legge che determina il suo moto lungo la rampa di destra;
4. Disegnare le forze che agiscono sul disco e scrivere la legge che determina il moto del suo centro di massa lungo la rampa di sinistra;
5. Scrivere la legge che determina il moto rotatorio del disco attorno al suo centro di massa;
6. Risolvere le equazioni ottenute nei punti 3, 4, 5, e determinare (in forma simbolica) l'accelerazione a del sistema e la forza di attrito F_{att} che agisce sul disco, in funzione di m_1, m_2, θ e $\mu_{1,D}$;
7. Determinare il valore esplicito di F_{att} nel caso particolare in cui $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 3.5\,\text{kg}$ e $\theta = \pi/5$ e $\mu_{1,D} = 0.1$;
8. Se all'istante $t = 0$ il centro di massa del disco ($m_2 = 3.5\,\text{kg}$) ha una velocità iniziale pari a $v_{\text{CM}} = 3.0\,\text{m/s}$, quanto vale l'energia cinetica iniziale del disco?

SOLUZIONE

1. Siccome il blocco è un punto materiale che si muove lungo la rampa strisciando, la forza di attrito che il piano esercita su di esso è di tipo *dinamico*, ed è pari a

$$f_{\text{att}} = \mu_{1,D}\, F_{p_1,\perp} = \mu_{1,D}\, m_1 g \cos\theta \tag{1}$$

dove $F_{p_1,\perp}$ è la componente normale al piano della forza peso. Siccome dal testo sappiamo che il blocco sale, la forza di attrito f_{att} si oppone al moto ed è diretta lungo il piano verso il basso. Pertanto la risposta corretta è

b) su m_1 agisce una forza di attrito f_{att} di modulo $\mu_{1,D}\, m_1 g \cos\theta$ lungo il piano

2. Sul disco viene esercitata una forza di attrito, altrimenti non rotolerebbe. Inoltre, siccome il disco rotola senza strisciare, il punto di contatto disco-rampa è istantaneamente fermo e dunque la forza di attrito F_{att} che la rampa esercita sul disco è di tipo *statico*. Il suo valore è un'incognita del problema. L'unica cosa che possiamo dire è che, essendo il punto di contatto fermo, tale forza incognita non supera la soglia massima, ossia vale che

$$|F_{\text{att}}| \leq \mu_{2,S}\, m_2 g \cos\theta \quad .$$

e *non* possiamo affermare che $|F_{\text{att}}| = \mu_{2,S}\, m_2 g \cos\theta$, che rappresenta solo il valore massimo. Pertanto la risposta corretta è

c) su m_2 agisce una forza di attrito F_{att} lungo il piano

Osserviamo anzitutto che, siccome il filo è inestensibile, il sistema blocco+disco si muove solidalmente, e la velocità e l'accelerazione traslatorie (nelle rispettive direzioni) sono le stesse per il disco e per il blocco. Fissiamo un verso convenzionale per l'accelerazione del sistema (il testo suggerisce quello di discesa lungo il piano per il disco, e dunque di salita lungo il piano per il blocco, come mostrato in figura 1).

3. Consideriamo le forze che agiscono sul corpo m_1. Anzitutto scomponiamo la forza peso nelle componenti parallela al piano e ortogonale al piano:

$$\begin{cases} F_{p_1,||} &= & -m_1\, g \sin\theta \\ F_{p_1,\perp} &= & -m_1\, g \cos\theta \end{cases} \tag{2}$$

dove la componente normale $F_{p_1,\perp}$ è bilanciata dalla reazione vincolare del piano e non ha effetto. Lungo il piano agiscono inoltre su m_1 anche la tensione T del filo (diretta verso l'alto) e la forza f_{att} di attrito dinamico (diretta verso il basso perché sappiamo che il blocco sale). L'equazione della dinamica per m_1, lungo il piano, è la seguente

$$\boxed{-m_1 g \sin\theta + T - \mu_{1,D}\, m_1 g \cos\theta = m_1 a} \qquad \text{(moto traslatorio di } m_1\text{)} \tag{3}$$

4. Il centro di massa del disco si muove con un moto dettato dalla sommatoria di tutte le forze che agiscono sul corpo, come applicate al centro di massa stesso. Consideriamo dunque le forze che agiscono su m_2. Scomponiamo la forza peso nelle componenti parallela al piano e ortogonale al piano:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_{p_2,||} & = & m_2\, g \sin\theta \\ F_{p_2,\perp} & = & -m_2\, g \cos\theta \end{array} \right. \tag{4}$$

dove la componente normale è bilanciata dalla reazione vincolare del piano e non ha effetto. Inoltre, agisce la tensione T del filo (diretta in maniera opposta a quella su m_1), ed infine sul disco agisce anche la forza di attrito (dato che il disco rotola) che si oppone al moto. Quindi l'equazione che determina il moto del centro di massa è

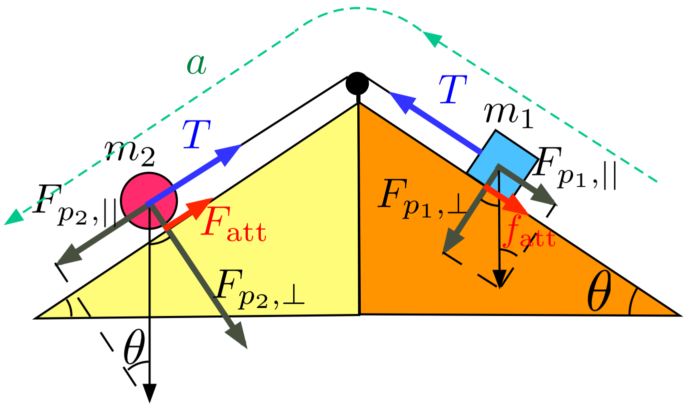


Figure 1:

$$\boxed{m_2 g \sin\theta - T - F_{\text{att}} = m_2 a} \qquad \text{(moto traslatorio di } m_2\text{)} \tag{5}$$

5. <u>moto rotatorio del disco attorno al centro di massa</u>;
Si tratta della equazione del moto rotatorio

$$\vec{M}'^E = \frac{d\vec{L}'^E}{dt} \tag{6}$$

dove $\vec{M}'^E$ e $\vec{L}'^E$ sono il momento delle forze e il momento angolare rispetto al sistema di riferimento (peraltro *non* inerziale) del centro di massa del disco. Osserviamo che

- per come sono dirette le forze, $\vec{M}'^E$ e $\vec{L}'^E$ sono diretti lungo l'asse perpendicolare al foglio (verso uscente), attorno a cui avviene la rotazione. Proiettando l'equazione vettoriale lungo questa direzione abbiamo

$$M'^E = \frac{dL'^E}{dt} \tag{7}$$

- L'unica forza che applica un momento è quella di attrito (le altre hanno braccio nullo)

$$M'^E = F_{\text{att}}\, R \tag{8}$$

- Il momento angolare lungo l'asse ortogonale al piano del disco (un asse principale) si scrive

$$L'^E = I_D\,\omega \quad\Rightarrow\quad \frac{dL'^E}{dt} = I_D\alpha \tag{9}$$

dove I_D è il momento d'inerzia del disco, e α è l'accelerazione angolare;

- siccome il moto del disco è di puro rotolamento, il punto di contatto è istantaneamente fermo, e dunque vale la relazione

$$\alpha = \frac{a}{R} \qquad \text{(condiz. moto di puro rotolamento)} \tag{10}$$

In conclusione, dalle equazioni (7), (8), (9) e (10) ricaviamo che

$$\boxed{F_{\rm att}\,R = I_D\,\frac{a}{R}} \qquad \text{(moto rotatorio di } m_1\text{)} \tag{11}$$

6. Abbiamo dunque ottenuto le seguenti equazioni [(3) (5), e (11)]

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\theta + T - \mu_{1,D}\, m_1 g\cos\theta = m_1 a \\ \\ m_2 g\sin\theta - T - F_{\rm att} = m_2 a \\ \\ F_{\rm att}\,R = I_D\,\dfrac{a}{R} \end{cases} \tag{12}$$

che costituisce un sistema di tre equazioni per le tre incognite a, $F_{\rm att}$ e T. Risolviamo il sistema di equazioni; portiamo in evidenza T nella prima equazione e dividiamo la terza equazione per R, e

$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g\sin\theta + \mu_{1,D}\, m_1 g\cos\theta \\ \\ m_2 g\sin\theta - T - F_{\rm att} = m_2 a \\ \\ F_{\rm att} = a\,\dfrac{I_D}{R^2} \end{cases} \tag{13}$$

Sostituendo la prima e la terza equazione nella seconda otteniamo

$$m_2 g\sin\theta - m_1 a - m_1 g\sin\theta - \mu_{1,D}\, m_1 g\cos\theta - a\,\frac{I_D}{R^2} = m_2 a$$

$$\Rightarrow\; g\,(\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D}\, m_1\cos\theta) = (m_2 + m_1 + \frac{I_D}{R^2})a$$

$$\Rightarrow\; a = g\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D} m_1\cos\theta}{m_2 + m_1 + \frac{I_D}{R^2}} \tag{14}$$

Ricordando ora che il momento d'inerzia di un disco vale

$$I_D = \frac{1}{2} m_2 R^2 \tag{15}$$

otteniamo che

$$\boxed{a = g\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D} m_1 \cos\theta}{m_1 + \frac{3}{2}m_2}} \tag{16}$$

Per quanto riguarda l'attrito $F_{\rm att}$, dalla terza delle (13) otteniamo che

$$F_{\rm att} = a\frac{I_D}{R^2} = \frac{1}{2}m_2 a \tag{17}$$

Sostituendo la (16) si ottiene

$$\boxed{F_{\rm att} = m_2 g\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D} m_1 \cos\theta}{2m_1 + 3m_2}} \tag{18}$$

Possiamo (anche se non richiesto) determinare infine la tensione T sostituendo l'eq.(16) nella prima delle equazioni (13); otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned}
T &= m_1\left(g\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D} m_1 \cos\theta}{m_1 + \frac{3}{2}m_2} + g\sin\theta + \mu_{1,D}\, g\cos\theta\right) = \\
&= m_1 g\left(\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D} m_1 \cos\theta}{m_1 + \frac{3}{2}m_2} + \sin\theta + \mu_{1,D}\, \cos\theta\right) = \\
&= m_1 g\left(\frac{\sin\theta(m_2 - m_1 + m_1 + \frac{3}{2}m_2) + \mu_{1,D}(-m_1 + m_1 + \frac{3}{2}m_2)\cos\theta}{m_1 + \frac{3}{2}m_2}\right) = \\
&= m_1 g\left(\frac{\frac{5}{2}m_2\sin\theta + \frac{3}{2}m_2\,\mu_{1,D}\cos\theta}{m_1 + \frac{3}{2}m_2}\right)
\end{aligned}$$

ossia

$$\boxed{T = g\, m_1 m_2\left(\frac{5\sin\theta + 3\,\mu_{1,D}\cos\theta}{2m_1 + 3m_2}\right)} \tag{19}$$

7. Sostituendo i valori numerici in (18) otteniamo

$$\begin{aligned}
F_{\rm att} &= m_2 g\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D} m_1 \cos\theta}{2m_1 + 3m_2} = \\
&= 3.5\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\;\frac{\sin\frac{\pi}{5}(3.5-2)\,\mathrm{kg}\; - 0.1\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot 2\,\mathrm{kg}}{2\cdot\, 2\,\mathrm{kg} + 3\cdot 3.5\,\mathrm{kg}} = \\
&= 1.70\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\
&= 1.70\,\mathrm{N}
\end{aligned} \tag{20}$$

8. Dal teorema di König sappiamo che l'energia cinetica del disco consta dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia cinetica rotazionale, ossia

$$E_K = \frac{1}{2}m_2 v_{\rm CM}^2 + \frac{1}{2}I_D\omega^2 \tag{21}$$

dove ω è la velocità angolare di rotazione, nel sistema del centro di massa, e I_D è il momento d'inerzia del disco calcolato rispetto all'asse passante per il centro di massa. Dato che il disco rotola senza strisciare si ha

$$\omega = \frac{v_{\rm CM}}{R}$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2} m_2 v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2} \frac{I_D}{R^2} v_{\mathrm{CM}}^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{I_D}{R^2} \right) v_{\mathrm{CM}}^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{2} m_2 \right) v_{\mathrm{CM}}^2 = \\
&= \frac{3}{4} m_2 \, v_{\mathrm{CM}}^2
\end{aligned} \tag{22}
$$

Sostituendo i valori

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{3}{4} \cdot 3.5\,\mathrm{kg} \cdot (3.0 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = \\
&= 23.6\,\mathrm{J}
\end{aligned} \tag{23}
$$