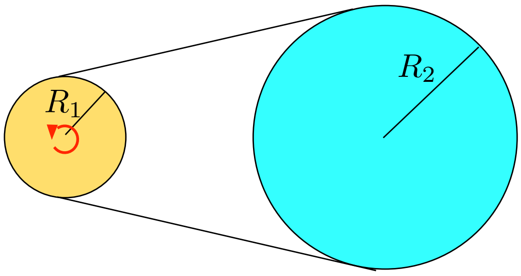
Esercizio (tratto dal problema 6.14 del Mazzoldi)

Due dischi rigidi di masse $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 20\,\mathrm{kg}$ e raggi $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ e $R_2 = 20\,\mathrm{cm}$ sono connessi da una cinghia indeformabile, che segue il movimento rotatorio dei dischi senza slittare. All'asse del primo disco è connesso un motore che può fornire un momento costante $M_{\mathrm{mot}} = 8\mathrm{N\,m}$ (diretto nel verso uscente dal foglio), mentre sull'asse del secondo disco agisce un momento frenante costante di modulo $M_{\mathrm{fr}} = 7\,\mathrm{N\,m}$. Al tempo $t = 0$ il motore comincia ad agire facendo ruotare il primo disco.



Calcolare:

1. la velocità angolare del secondo disco all'istante $t = 5\,\mathrm{s}$;
2. il lavoro fornito dal motore fino a tale istante.

SOLUZIONE

DATI NOTI:
$m_1 = 5\,\mathrm{kg}$;
$m_2 = 20\,\mathrm{kg}$;
$R_1 = 0.1\,\mathrm{m}$;
$R_2 = 0.2\,\mathrm{m}$;
$M_{\mathrm{mot}} = 8\mathrm{N\,m}$;
$M_{\mathrm{fr}} = 7\,\mathrm{N\,m}$

- La cinghia esercita tensioni uguali ed opposte sui dischi, cercando di 'trattenere' la rotazione del disco 1 dettata dal motore, e ponendo invece in rotazione il disco 2.

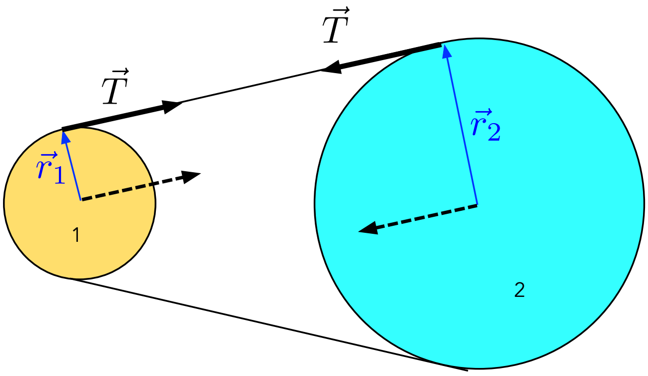


Figure 1: Le tensioni della cinghia.

- Scriviamo ora le seconde equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido per ciascun disco,

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^{ext} \qquad\qquad i = 1,2 \tag{1}$$

  tenendo conto che ciascun disco ruota attorno ad un asse fisso.

  1. **disco 1:**

     – **Momenti delle forze:**
     Dal testo sappiamo che sul disco 1 agisce il momento $\vec{M}_{\mathrm{mot}}$ del motore, che è diretto nel verso uscente dal foglio e che fa dunque ruotare il disco in senso anti-orario. Tuttavia, sul disco 1 agisce anche il momento dovuto alla tensione. Quest'ultimo si calcola trasportando parallelamente il vettore tensione $\vec{T}$ applicato al disco 1 in modo da farne coincidere la coda con quella del vettore $\vec{r}_1$ del punto di applicazione [vedi Fig.1] e applicando la regola della mano destra al prodotto vettoriale $\vec{r}_1 \times \vec{T}$, ottenendo un momento diretto nel verso *entrante* nel foglio. Pertanto, indicando

$$\boxed{\hat{k} \;=\; \text{versore uscente dal foglio}}$$

il momento esterno totale agente sul disco 1 è

$$\begin{aligned}
\vec{M}_1^{ext} &= \vec{M}_{\rm mot} + \vec{r}_1 \times \vec{T} = \\
&= M_{\rm mot}\,\hat{k}\ - |\vec{r}_1 \times \vec{T}|\,\hat{k} = \\
&= M_{\rm mot}\,\hat{k}\ - \underbrace{|\vec{r}_1|}_{R_1}\ \underbrace{|\vec{T}|}_{T}\ \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\ \hat{k} = \\
&= (M_{\rm mot} - R_1\,T)\,\hat{k} \qquad (2)
\end{aligned}$$

- **Momento angolare:**
  Dato che l'asse di rotazione è anche un asse di simmetria del disco (il disco è omogeneo e simmetrico rispetto al suo centro, e l'asse di rotazione passa proprio per il suo centro) il momento angolare $\vec{L}_1$ del disco 1 è parallelo al vettore velocità angolare

$$\vec{L}_1 = I_1\,\vec{\omega}_1 = I_1\,\omega_1\,\hat{k} \qquad (3)$$

  dove

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \qquad (4)$$

  è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse passante per il suo centro e perpendicolare al suo piano.

- **Seconda equazione cardinale:**

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_1}{dt} &= \vec{M}_1^{ext} \\
&\Downarrow \\
I_1 \frac{d\omega_1}{dt}\,\hat{k} &= (M_{\rm mot} - R_1 T)\,\hat{k}
\end{aligned}$$

  Moltiplicando scalarmente per $\hat{k}$ entrambi i membri si ottiene

$$\boxed{I_1 \alpha_1 = (M_{\rm mot} - R_1 T)} \qquad (5)$$

2. **disco 2:**
   - **Momenti delle forze:**
     Sul disco 2 agisce il momento dovuto alla tensione della cinghia che è diretto nel verso uscente dal foglio, come si vede trasportando parallelamente il vettore tensione $\vec{T}$ applicato al disco 2 in modo che abbia la coda coincidente con quella del vettore $\vec{r}_2$ del punto di applicazione [vedi Fig.1] e applicando la regola della mano destra al prodotto vettoriale $\vec{r}_2 \times \vec{T}$. Inoltre sul disco 2 agisce anche il momento $\vec{M}_{\rm fr}$ delle forze frenanti che, opponendosi alla rotazione anti-oraria del disco, è diretto nel verso entrante al foglio. Pertanto, tenendo conto che $\hat{k}$ denota sempre il versore uscente dal foglio, il momento esterno totale agente sul disco 2 è

$$\begin{aligned}
\vec{M}_2^{ext} &= \vec{r}_2 \times \vec{T} + \vec{M}_{\rm fr} = \\
&= +|\vec{r}_2 \times \vec{T}|\,\hat{k} - M_{\rm fr}\,\hat{k}\ = \\
&= \underbrace{|\vec{r}_2|}_{R_2}\ \underbrace{|\vec{T}|}_{T}\ \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\ \hat{k} - M_{\rm fr}\,\hat{k}\ = \\
&= (R_2\,T - M_{\rm fr})\,\hat{k} \qquad (6)
\end{aligned}$$

– **Momento angolare:**
Anche per il disco 2, dato che l'asse di rotazione è anche un asse di simmetria del disco, il momento angolare $\vec{L}_2$ è parallelo al vettore velocità angolare $\vec{\omega}_2$

$$\vec{L}_2 = I_2\,\vec{\omega}_2 = I_2\,\omega_2\,\hat{k} \tag{7}$$

dove

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \tag{8}$$

è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse passante per il suo centro e perpendicolare al suo piano.

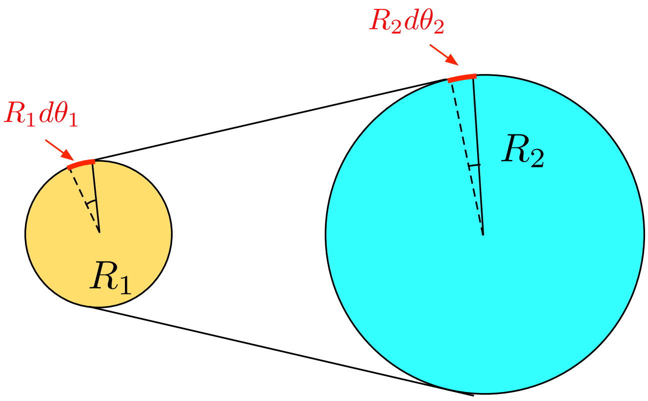
– **Seconda equazione cardinale:**

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_2}{dt} &= \vec{M}_2^{ext} \\ &\Downarrow \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt}\,\hat{k} &= (R_2\,T - M_{\rm fr})\,\hat{k} \end{aligned}$$

Moltiplicando scalarmente per $\hat{k}$ entrambi i membri si ottiene

$$\boxed{I_2 \alpha_2 = (R_2\,T - M_{\rm fr})} \tag{9}$$

- Dato che la cinghia è inestensibile e che segue il movimento dei dischi senza slittare, le rotazioni dei due dischi sono legate l'una all'altra. Infatti, se in un intervallo di tempo dt un trattino di cinghia $R_1 d\theta_1$ avanza seguendo la rotazione del primo disco, nello stesso intervallo di tempo un pari tratto di cinghia $R_2 d\theta_2$ deve avanzare seguendo la rotazione del secondo disco



$$\begin{aligned} R_1 d\theta_1 &= R_2 d\theta_2 \\ &\Downarrow \quad [\text{divido per } dt] \\ R_1 \frac{d\theta_1}{dt} &= R_2 \frac{d\theta_2}{dt} \end{aligned} \tag{10}$$

Pertanto

$$R_1 \omega_1(t) = R_2 \omega_2(t) \qquad \forall t \tag{11}$$

Dato che ciò vale istante per istante, derivando rispetto al tempo, ne segue anche che

$$\boxed{R_1 \alpha_1(t) = R_2 \alpha_2(t)} \qquad \forall t \tag{12}$$

- Combinando le Eq.(5), (9) e (12) otteniamo

$$\begin{cases} I_1\,\alpha_1 &=& M_{\rm mot} - R_1 T \\ I_2\,\alpha_2 &=& R_2\,T - M_{\rm fr} \\ R_1\alpha_1 &=& R_2\,\alpha_2 \end{cases} \tag{13}$$

che è un sistema di tre equazioni per le tre incognite α_1, α_2 e T. Dalla terza equazione ricaviamo

$$\alpha_1 = \frac{R_2}{R_1}\,\alpha_2 \tag{14}$$

che, sostituita nella prima, dà

$$\begin{aligned} I_1\,\frac{R_2}{R_1}\,\alpha_2 &= M_{\rm mot} - R_1 T \\ &\Downarrow \\ T &= \frac{M_{\rm mot}}{R_1} - I_1\frac{R_2}{R_1^2}\alpha_2 \end{aligned} \tag{15}$$

Dalla seconda equazione (13) abbiamo

$$T = \frac{I_2}{R_2}\alpha_2 + \frac{M_{\rm fr}}{R_2} \tag{16}$$

Confrontando le Eq.(15) e (16) otteniamo

$$\frac{M_{\rm mot}}{R_1} - I_1\frac{R_2}{R_1^2}\alpha_2 = \frac{I_2}{R_2}\alpha_2 + \frac{M_{\rm fr}}{R_2}$$

$$\Downarrow \tag{17}$$

$$\frac{M_{\rm mot}}{R_1} - \frac{M_{\rm fr}}{R_2} = \alpha_2\left(I_1\frac{R_2}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2}\right)$$

$$\Downarrow \quad \text{[moltiplico ambo i membri per } R_1R_2] \tag{18}$$

$$R_2M_{\rm mot} - R_1M_{\rm fr} = \alpha_2\left(I_1\frac{R_2^2}{R_1} + I_2R_1\right)$$

$$\Downarrow \tag{19}$$

$$\alpha_2 = \frac{R_2M_{\rm mot} - R_1M_{\rm fr}}{I_1\frac{R_2^2}{R_1} + I_2R_1} \tag{20}$$

Ricordando l'espressione (4) e (8) dei momenti d'inerzia

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{R_2M_{\rm mot} - R_1M_{\rm fr}}{\frac{1}{2}m_1R_1^2\,\frac{R_2^2}{R_1} + \frac{1}{2}m_2R_2^2R_1} = \\ &= 2\,\frac{R_2M_{\rm mot} - R_1M_{\rm fr}}{(m_1+m_2)R_1R_2^2} \end{aligned} \tag{21}$$

Osservazione: Essendo le quantità a destra dell"=" dell'Eq.(21) tutte costanti, l'accelerazione angolare α_2 è costante nel tempo. Pertanto il disco ruota con moto circolare uniformemente accelerato.

- Sostituendo i valori, otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 2\,\frac{0.2\,\mathrm{m}\cdot 8\,\mathrm{N\,m} - 0.1\,\mathrm{m}\cdot 7\,\mathrm{N\,m}}{(5+20)\,\mathrm{kg}\cdot\ 0.1\,\mathrm{m}\cdot(0.2\,\mathrm{m})^2} = \\ &= 2\,\frac{(1.6\ -0.7)\ \frac{\cancel{\mathrm{kg}}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}{\mathrm{s}^2}}{25\ \cdot\ 0.004\,\cancel{\mathrm{kg}}\,\cancel{\mathrm{m}^3}} = \\ &= 18\ \mathrm{s}^{-2} \end{aligned} \qquad (22)$$

- Trattandosi di un moto circolare uniformemente accelerato, e dato che i dischi partono inizialmente da fermi, la velocità angolare del disco 2 varia linearmente nel tempo, ed è data da

$$\omega_2(t) = \underbrace{\omega(0)}_{=0} + \alpha_2\, t \qquad (23)$$

Pertanto la velocità angolare del secondo disco all'istante $t = 5\,\mathrm{s}$ vale

$$\omega_2(t = 5\,\mathrm{s}) \;=\; 18\ \mathrm{s}^{-2}\cdot 5\,\mathrm{s} = 90\ \mathrm{s}^{-1} \qquad (24)$$

- In virtù della relazione (14), l'accelerazione angolare del disco 1 vale

$$\alpha_1 = \frac{0.2\,\mathrm{m}}{0.1\,\mathrm{m}}\ 18\ \mathrm{s}^{-2} = 36\ \mathrm{s}^{-2} \qquad (25)$$

ed è dunque anch'essa costante nel tempo. Pertanto anche il disco 1 ruota con moto circolare uniformemente accelerato. La sua legge oraria angolare vale pertanto

$$\theta_1(t) = \underbrace{\theta_1(0)}_{=0} + \underbrace{\omega_1(0)}_{=0}\ t + \frac{1}{2}\alpha_1\, t^2 \qquad (26)$$

e dunque all'istante $t = 5\,\mathrm{s}$ il disco 1 ha spazzato un angolo

$$\begin{aligned} \theta^* &= \theta_1(t = 5\,\mathrm{s}) = \\ &= \frac{1}{2}\,\alpha_1\,(5\,\mathrm{s})^2 = \\ &= \frac{1}{2}\cdot 36\ \mathrm{s}^{-2}\cdot 25\mathrm{s}^2 = \\ &= 450 \end{aligned} \qquad (27)$$

- Il lavoro compiuto dal motore connesso al disco 1 fino all'istante $t = 5\,\mathrm{s}$ vale

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{mot}} &= \int_0^{\theta^*} M_{\mathrm{mot}}\, d\theta = \\ &= [M_{\mathrm{mot}}\ \text{è costante}] \\ &= M_{\mathrm{mot}} \int_0^{\theta^*} d\theta = \\ &= M_{\mathrm{mot}}\theta^* = \\ &= 8\,\mathrm{N\,m}450 = \\ &= 3600\,\mathrm{J} \end{aligned} \qquad (28)$$