Esercizio (tratto dal problema 6.15 del Mazzoldi)

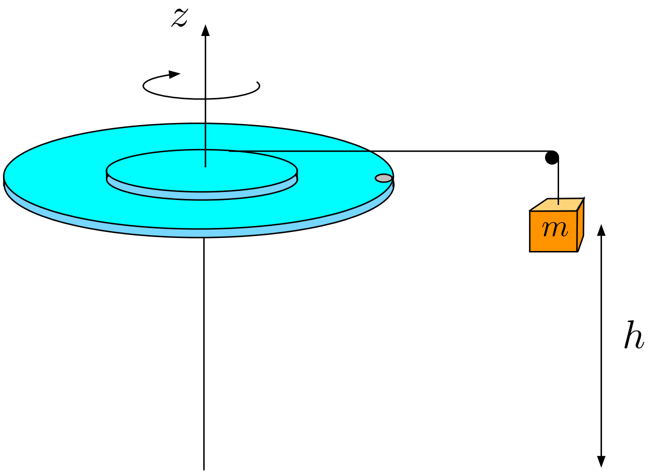
Due sottili dischi di ferro, di raggi $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ e $R_2 = 2R_1$ e masse $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 1.5m_1$, sono fissati solidalmente l'uno all'altro in modo da risultare coassiali. Essi possono ruotare senza attrito attorno all'asse verticale passante per il loro centro di massa. Attorno al disco di raggio R_1 è avvolto un filo inestensibile a cui è appesa la massa $m = 1\,\mathrm{kg}$. All'istante $t = 0$ la massa m, inizialmente in quiete, viene lasciata scendere.

1. Calcolare il tempo t_d necessario perché essa scenda di un'altezza $h = 10\,\mathrm{m}$.

2. Calcolare il modulo T della tensione del filo.

Sul bordo del disco di raggio R_2 è fissato un magnetino di massa $m_0 = 10\,\mathrm{gr}$ e dimensioni trascurabili. La forza magnetica che lo tiene attaccato al disco vale in modulo $F_0 = 1.5\,\mathrm{N}$

3. Dire se all'istante t_d il magnetino è ancora attaccato al disco



SOLUZIONE
Dati noti:
$R_1 = 0.1\,\mathrm{m}$;
$R_2 = 2R_1 = 0.2\,\mathrm{m}$;
$m_1 = 2\,\mathrm{kg}$;
$m_2 = 1.5m_1 = 3\,\mathrm{kg}$;
$m = 1\,\mathrm{kg}$;
$h = 10\,\mathrm{m}$;
$m_0 = 0.01\,\mathrm{kg}$;
$F_0 = 1.5\,\mathrm{N}$;

1. Disegniamo anzitutto le forze che agiscono sul sistema.

   - Sul corpo di massa m agiscono la forza peso (diretta verso il basso) e la tensione del filo (diretta verso l'alto)
   - Sul doppio disco agisce la tensione del filo, applicata all'estremo del disco più piccolo. Oltre a questo, certamente sui due dischi agisce la forza peso. Tuttavia, essa è bilanciata esattamente dalla reazione vincolare del perno che tiene i dischi in modo che non cadano. Dato che si annullano vicendevolmente non è necessario considerare queste due forze che dunque non sono state disegnate.

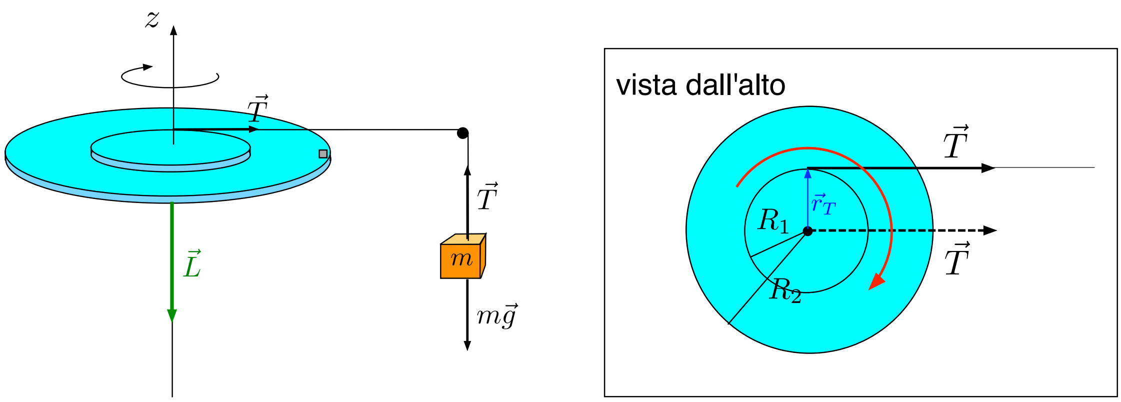


Figure 1: Riquadro a sinistra: schema delle forze che agiscono sui corpi. Riquadro a destra: il sistema del doppio disco visto dall'alto.

2. Scriviamo ora le equazioni della dinamica

   - **Equazione per il corpo** m
     Si tratta di un punto materiale, per cui scriviamo

$$\begin{aligned} \underbrace{m\vec{g} + \vec{T}}_{\vec{F}} &= m\vec{a} \\ &\Downarrow \\ (-mg + T)\hat{u}_z &= -ma\hat{u}_z \end{aligned}$$

     Moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\hat{u}_z$ e usando $\hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = 1$ ricaviamo

$$\boxed{mg - T = ma} \tag{1}$$

- **Equazione per il doppio disco**
  Si tratta di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso (=l'asse verticale z), ed ha dunque un moto puramente rotatorio. La seconda equazione cardinale della dinamica del corpo rigido è

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext} \tag{2}$$

dove:

  - Il momento $\vec{M}^{ext}$ delle forze esterne è il momento della tensione. Scegliamo come polo Ω il centro dei due dischi. Trasportando il vettore $\vec{T}$ parallelamente in modo che la coda coincida con la coda del vettore $\vec{r}_T$ del punto di applicazione, osserviamo che esso è diretto nel verso entrante del riquadro destro di Fig.1, ossia nel verso *negativo* dell'asse z.

$$\vec{M}^{ext} \quad = \quad \vec{M}_T = \vec{r}_T \times \vec{T} = -|\vec{r}_T \times \vec{T}|\, \hat{u}_z \tag{3}$$

  Indicando $T = |\vec{T}|$ si ha $|\vec{r}_T \times \vec{T}| = R_1\, T \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$ e dunque

$$\vec{M}^{ext} = -R_1\, T\, \hat{u}_z \tag{4}$$

  - Il momento angolare, essendo l'asse di rotazione fisso e coincidente con l'asse di simmetria del doppio disco, vale

$$\vec{L} = I_{DD}\, \vec{\omega} \tag{5}$$

  dove il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ è diretto lungo z verso il basso perché la rotazione del doppio disco è in senso orario. Per esprimere $\vec{\omega}$ abbiamo due scelte possibili (ed equivalenti)

$$\begin{cases} \text{scelta 1:} \quad \vec{\omega} = \omega\, \hat{u}_z \qquad \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} < 0 & \text{(corrisponde a prendere come positivo il verso } \textit{antiorario} \text{ degli angoli nel riquadro destro di Fig.1)} \\ \text{scelta 2:} \quad \vec{\omega} = -\omega\, \hat{u}_z \qquad \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} > 0 & \text{(corrisponde a prendere come positivo il verso } \textit{orario} \text{ degli angoli nel riquadro destro di Fig.1)} \end{cases}$$

  Adottando la scelta 2

$$\vec{\omega} = -\omega\, \hat{u}_z \qquad\qquad \omega(t) > 0 \tag{6}$$

  il momento angolare si scrive

$$\vec{L} = -I_{DD}\, \omega\, \hat{u}_z \tag{7}$$

  Il momento d'inerzia I_{DD} del doppio disco (DD) rispetto all'asse z di rotazione è la somma dei momenti d'inerzia dei due dischi

$$I_{DD} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \tag{8}$$

  (in linea di principio dovremmo anche aggiungere il momento d'inerzia dovuto al magnetino, che però ha una massa davvero trascurabile rispetto ai dischi). Sfruttando il fatto che $R_2 = 2R_1$ e che $m_2 = 1.5 m_1$, si può riesprimere

$$\begin{aligned} I_{DD} \quad &= \quad \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2} m_1 (2R_1)^2 = \\ &= \quad \left(\frac{1}{2} + 3\right) m_1 R_1^2 \end{aligned} \tag{9}$$

  ossia

$$I_{DD} = \frac{7}{2}\, m_1 R_1^2 \tag{10}$$

Sostituendo le Eq.(4) e (7) nell'Eq.(2) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}^{ext} \\ &\Downarrow \\ -I_{DD}\frac{d\omega}{dt}\,\hat{u}_z &= -R_1\,T\,\hat{u}_z \end{aligned}$$

Denotando $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ l'accelerazione angolare, moltiplicando scalaramente per $\hat{u}_z$ [e sfruttando come al solito $\hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = 1$] si ottiene

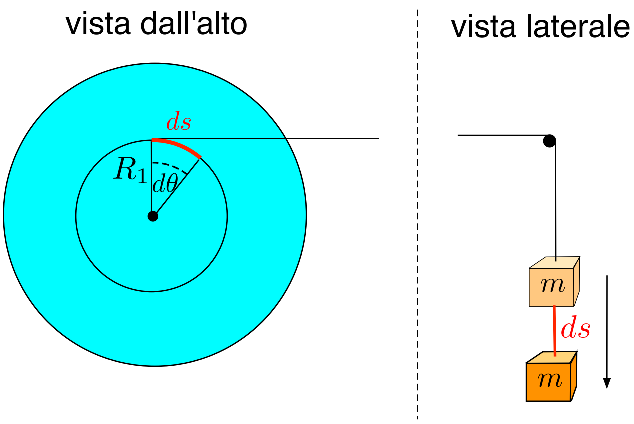
$$\boxed{I_{DD}\,\alpha\ = R_1\,T} \tag{11}$$

- **Condizione di inestensibilità del filo**
  Dato che il filo è inestensibile, il moto traslatorio verso il basso della massa m ed il moto rotatorio del disco sono strettamente legati. Infatti, ad ogni istante, quando il corpo m scende di un tratto $ds = vdt$ verso il basso, il raggio del disco piccolo (a cui il filo è avvolto) descrive un arco di lunghezza proprio pari a ds, che si può anche scrivere $ds = Rd\theta = R\omega\,dt$

$$\begin{aligned} vdt &= R\omega\,dt \\ &\Downarrow \\ v(t) &= \omega(t)\,R \\ &\Downarrow \\ \frac{dv}{dt} &= R\frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \tag{12}$$

ossia

$$\boxed{a = R\,\alpha \qquad \leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{a}{R}} \tag{13}$$



Pertanto le 2 equazioni (1) e (11):

$$\begin{cases} mg - T &= ma \\ I_{DD}\,\alpha &= R_1\,T \end{cases} \tag{14}$$

sono legate tramite la relazione (13). Sostituendo $\alpha = \frac{a}{R}$ nella seconda equazione (14) si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mg - T & = & ma \\ \\ I_{DD}\,\frac{a}{R_1} & = & R_1\,T \end{array} \right. \tag{15}$$

che è un sistema di 2 equazioni per le 2 incognite a e T.

3. Risolviamo ora il sistema delle due equazioni.

   (a) Per trovare a possiamo ad esempio isolare T in entrambe le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T & = & m(g-a) \\ \\ T & = & I_{DD}\,\frac{a}{R_1^2} \end{array} \right. \tag{16}$$

   e uguagliando

$$\begin{array}{rcl} m(g-a) & = & I_{DD}\,\dfrac{a}{R_1^2} \\ & \Downarrow & \\ mg & = & a\left(\dfrac{I_{DD}}{R_1^2} + m\right) \end{array} \tag{17}$$

   da cui troviamo

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I_{DD}}{mR_1^2}} \tag{18}$$

   Sostituendo l'espressione (10) del momento d'inerzia del doppio disco,

$$I_{DD} = \frac{7}{2}\,m_1 R_1^2 \tag{19}$$

   otteniamo

$$\boxed{a = \frac{g}{1 + \frac{7m_1}{2m}}} \tag{20}$$

   Osservazione:
   Essendo g, m_1 ed m delle costanti, l'accelerazione a con cui scende il corpo m è costante e dunque il moto di discesa del corpo m è uniformemente accelerato.

   Sostituendo i valori si ottiene

$$a \;=\; \frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1 + \frac{7\cdot 2\,\mathrm{k}\cancel{\mathrm{g}}}{2\cdot 1\,\mathrm{k}\cancel{\mathrm{g}}}} = \;1.23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{21}$$

   (b) La tensione T del filo è ora data dalla prima equazione del sistema (16)

$$T = m(g-a) \tag{22}$$

   Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{array}{rcl} T & = & 1\,\mathrm{kg}\left(9.81\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 1.23\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ & = & 8.58\,\underbrace{\dfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\ & = & 8.58\,\mathrm{N} \end{array} \tag{23}$$

4. Dato che il moto di discesa del corpo m è uniformemente accelerato, e che parte dall'altezza h da fermo, la legge oraria del suo moto lungo z è

$$z(t) = h + \underbrace{v_0}_{=0} t - \frac{1}{2} a t^2 \tag{24}$$

Al tempo t_d di caduta al suolo la coordinata z si annulla e dunque

$$\begin{aligned} z(t_d) &= 0 \\ &\Downarrow \\ h - \frac{1}{2} a t_d^2 &= 0 \\ 2h &= a t_d^2 \end{aligned} \tag{25}$$

da cui

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{a}} \tag{26}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$t_d = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,\cancel{\mathrm{m}}}{1.23\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}}} = 4.0\,\mathrm{s} \tag{27}$$

5. Siccome il moto di discesa del corpo m ed il moto rotatorio del doppio disco sono legati dalla relazione (13), il fatto che l'accelerazione a con cui scende il corpo m sia costante implica che anche α è costante, ossia il moto rotatorio del doppio disco è circolare uniformemente accelerato. Tenendo conto che parte da fermo, la legge oraria della sua velocità angolare vale pertanto

$$\omega(t) = \underbrace{\omega_0}_{=0} + \underbrace{\alpha}_{=\frac{a}{R_1}} t = \frac{a}{R_1} t \tag{28}$$

dove abbiamo usato l'Eq.(13).

- Ad un generico istante t un corpo che si trovi al bordo del disco grande effettua un moto circolare uniformemente accelerato e possiede pertanto un'accelerazione pari a

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \underbrace{a_r(t)\hat{u}_r(t)}_{\text{radiale}} + \underbrace{a_\theta(t)\,\hat{u}_\theta}_{\text{tangenziale}} = \\ &= -R_2\,\omega^2(t)\,\hat{u}_r(t) + R_2\alpha\,\hat{u}_\theta(t) = \\ &\quad \text{[uso l'Eq.(28) e l'Eq.(13)]} \\ &= -R_2 \left(\frac{a}{R_1} t\right)^2 \hat{u}_r(t) + R_2 \frac{a}{R_1} \hat{u}_\theta(t) = \\ &= -\frac{R_2}{R_1^2} a^2\, t^2\, \hat{u}_r(t) + a \frac{R_2}{R_1} \hat{u}_\theta(t) \end{aligned} \tag{29}$$

dove $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_\theta$ sono rispettivamente il versore radiale e il versore tangente che identificano la posizione del magnetino rispetto al centro dei dischi, come mostrato in Fig.2 ($\hat{u}_\theta$ è orientato in maniera consistente con la scelta (6) di considerare come positivo il verso orario degli angoli).

- Pertanto ad un istante t un magnetino di massa m_0 che esegua un moto circolare uniformemente accelerato al bordo del disco è soggetto alla forza

$$\vec{F}(t) = m_0 \vec{a}(t) = \underbrace{-m_0 \frac{R_2}{R_1^2}\, a^2\, t^2}_{=F_r(t)}\, \hat{u}_r(t) + \underbrace{m_0 a \frac{R_2}{R_1}}_{F_\theta}\, \hat{u}_\theta(t) \tag{30}$$

il cui modulo vale

$$\begin{aligned} |\vec{F}(t)| &= \sqrt{F_r^2(t) + F_\theta^2} = \sqrt{m_0^2 \frac{R_2^2}{R_1^4}\, a^4\, t^4 + m_0^2 a^2 \frac{R_2^2}{R_1^2}} = \\ & \quad [\text{ricordiamo che } R_2 = 2R_1\ ] \\ &= \sqrt{\frac{4m_0^2}{R_1^2}\, a^4\, t^4 + 4m_0^2 a^2} = \\ & \quad [\text{estraiamo } 4m_0^2 \text{ dalla radice}] \\ &= 2m_0 \sqrt{\frac{a^4\, t^4}{R_1^2} + a^2} \end{aligned} \tag{31}$$

Come si vede, la forza necessaria per tenere il magnetino in moto circolare al bordo del disco grande cresce nel tempo (in virtù del fatto che cresce la componente radiale).

- Il magnetino può trovarsi attaccato al bordo solo finché il modulo $|\vec{F}(t)|$ di tale forza è inferiore alla forza magnetica F_0 che può tenerlo attaccato al disco.

$$|\vec{F}(t)| \leq F_0 \qquad \text{(condizione perché il magnetino rimanga attaccato)} \tag{32}$$

L'istante t^* a cui il magnetino si stacca è determinato dalla condizione

$$\begin{aligned} |\vec{F}(t^*)| &= F_0 \\ & \Downarrow \\ 2m_0 \sqrt{\frac{a^4\, t^4}{R_1^2} + a^2} &= F_0 \\ & \Downarrow \\ \frac{a^4\, t^4}{R_1^2} + a^2 &= \left(\frac{F_0}{2m_0}\right)^2 \\ & \Downarrow \\ t^4 &= \frac{R_1^2}{a^4} \left(\left(\frac{F_0}{2m_0}\right)^2 - a^2 \right) \\ & \Downarrow \\ t^* &= \frac{\sqrt{R_1}}{a} \left(\left(\frac{F_0}{2m_0}\right)^2 - a^2 \right)^{1/4} \end{aligned} \tag{33}$$

Sostituendo i valori troviamo

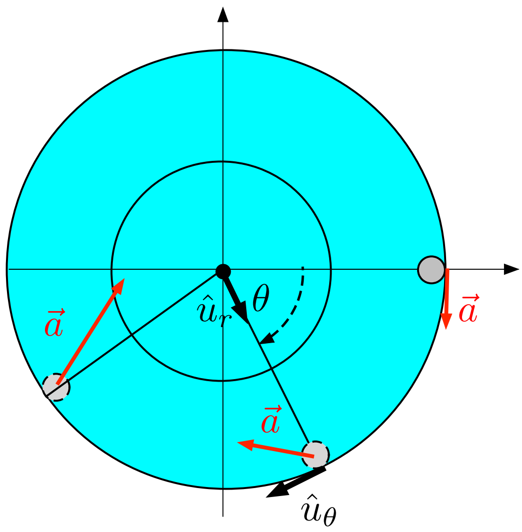


Figure 2: Il moto del magnetino attaccato al bordo del disco grande è circolare uniformemente accelerato. Allo scorrere del tempo la componente radiale dell'accelerazione $\vec{a}$ aumenta, e lo stesso fa la forza $\vec{F} = m_0 \vec{a}$.

$$\begin{aligned}
t^* &= \frac{\sqrt{0.1\,\mathrm{m}}}{1.23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \left(\left(\frac{1.5\,\mathrm{N}}{2 \cdot 0.01\,\mathrm{kg}} \right)^2 - \left(1.23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right)^2 \right)^{1/4} = \\
& \quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}] \\
&= 0.257\,\frac{\mathrm{s}^2}{\sqrt{\mathrm{m}}} \left(5625 \left(\frac{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{s}^2} \right)^2 - 1.51 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right)^2 \right)^{1/4} = \\
&= 0.257\,\frac{\mathrm{s}^2}{\sqrt{\mathrm{m}}} \left(5623.5 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right)^2 \right)^{1/4} = \\
&= 0.257\,\frac{\mathrm{s}^2}{\sqrt{\cancel{\mathrm{m}}}} \cdot 8.66 \frac{\sqrt{\cancel{\mathrm{m}}}}{\mathrm{s}} = \\
&= 2.23\,\mathrm{s}
\end{aligned} \tag{34}$$

Dato che $t^* = 2.23\,\mathrm{s}$ è inferiore all'istante $t_d = 4.0\,\mathrm{s}$ di discesa del corpo, ne deduciamo che il magnetino m_0 si stacca *prima* che il corpo m abbia toccato il suolo.