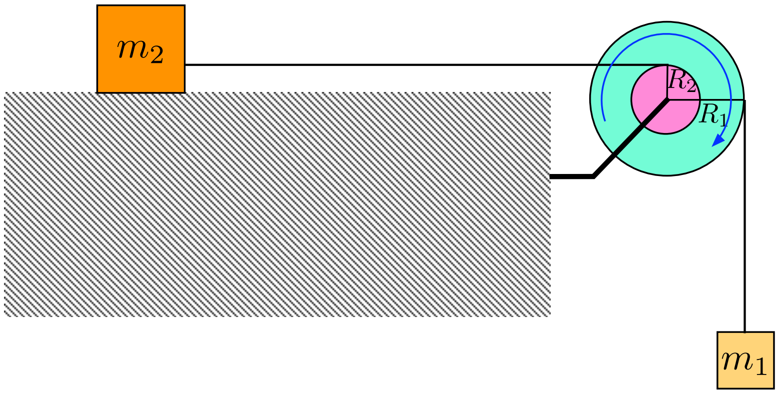
Esercizio (tratto dal problema 6.8 del Mazzoldi)

Su un piano orizzontale è posata una massa $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$. Il coefficiente di attrito dinamico tra m_2 e piano è μ. Essa viene messa in movimento tramite un filo che si avvolge su una puleggia di raggio $R_2 = 20\,\mathrm{cm}$. Questa è messa in rotazione dalla discesa, sotto l'azione del peso, di una massa $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$, a cui è collegata da un filo avvolto su una puleggia di raggio $R_1 = 50\,\mathrm{cm}$, coassiale e rigidamente fissata alla precedente. Il momento d'inerzia del sistema delle due pulegge rispetto al comune asse di rotazione vale $I_p = 6\,\mathrm{kg\,m^2}$. Calcolare, nei due casi di piano liscio ($\mu = 0$) e piano scabro ($\mu = 0.25$) le seguenti quantità:

1. la velocità v_f di m_1 dopo che è scesa di $h = 1\,\mathrm{m}$;
2. le tensioni dei due fili durante il movimento.



SOLUZIONE

Dati noti:
$m_1 = 4\text{kg}$
$m_2 = 10\,\text{kg}$
$R_1 = 0.5\text{m}$
$R_2 = 0.2\text{m}$
$I_p = 6\,\text{kg}\,\text{m}^2$
$h = 1\,\text{m}$

SCRIVERE LE EQUAZIONI DEL MOTO
Iniziamo scrivendo le equazioni del moto per i tre componenti del sistema, ossia i due punti materiali m_1 ed m_2 e la puleggia (corpo rigido). Dato che dobbiamo considerare sia il caso con attrito che senza attrito, ci conviene considerare il caso generale con attrito, da quale ricaveremo eventualmente il caso di piano liscio ponendo $\mu \to 0$ alla fine dei calcoli.

1. **Equazione per** m_1
   Il blocco m_1 è un punto materiale che è soggetto alla forza peso (diretta verticalmente verso il basso) e alla tensione T_1 (diretta verticalmente verso l'alto). Pertanto, prendendo come positivo il verso dall'alto al basso, la seconda equazione della dinamica è

$$\begin{aligned} F_1 &= m_1 a_1 \\ &\downarrow \\ m_1 g - T_1 &= m_1 a_1 \end{aligned} \tag{1}$$

   e dunque

$$\boxed{m_1 g - T_1 = m_1 a_1} \tag{2}$$

2. **Equazione per** m_2
   Il blocco m_2 è un punto materiale che è soggetto alla tensione T_2 del filo (diretta orizzontalmente verso destra) e alla forza di attrito dinamico (diretta orizzontalmente verso sinistra). La forza peso è annullata esattamente dalla reazione vincolare del piano, dato che il moto di m_2 avviene solo orizzontalmente, e dunque verticalmente il corpo è fermo. Pertanto la seconda equazione della dinamica lungo il piano (prendendo come positivo il verso da sinistra verso destra) è

$$\begin{aligned} F_2 &= m_2 a_2 \\ &\downarrow \\ T_2 - \mu m_2 g &= m_2 a_2 \end{aligned} \tag{3}$$

   e dunque

$$\boxed{T_2 - \mu m_2 g = m_2 a_2} \tag{4}$$

3. **Equazione del moto rotatorio della puleggia**
   La puleggia è un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso. Ad esso sono applicati due momenti, dovuti alle tensioni dei due fili

$$\vec{M}_1 = \vec{R}_1 \times \vec{T}_1 \qquad\qquad \vec{M}_2 = \vec{R}_2 \times \vec{T}_2 \tag{5}$$

   Per calcolare il momento $\vec{M}_1$ trasportiamo innanzitutto parallelamente uno dei due vettori (ad esempio la tensione $\vec{T}_1$) in modo che le code dei due vettori $\vec{R}_1$ e $\vec{T}_1$ coincidano (vedi inserto della

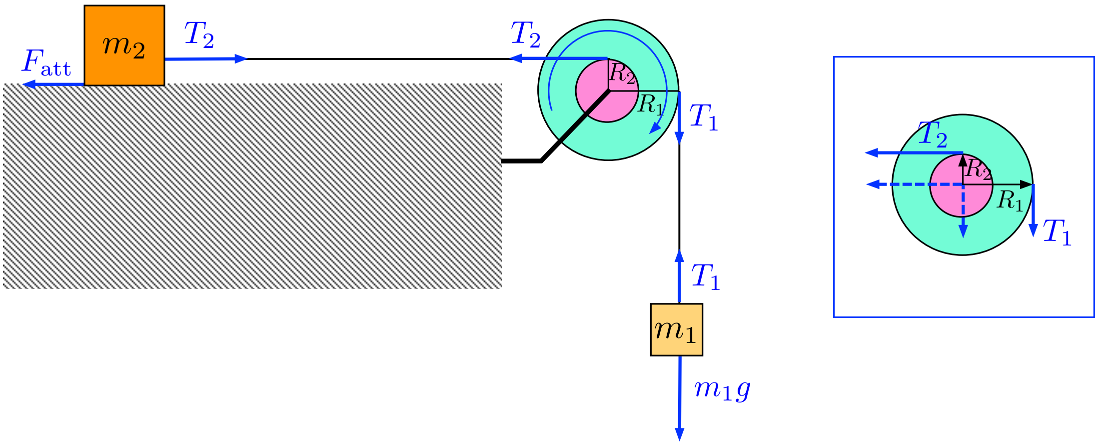


Figure 1: Lo schema delle forze applicate alle masse e alla puleggia

Fig.1). A questo punto, andando cone le dita della mano destra dal primo vettore (ossia $\vec{R}_1$) al secondo vettore (ossia $\vec{T}_1$) il pollice punta nel verso entrante. Ripetendo lo stesso procedimento per il momento $\vec{M}_2$, si trova che in tal caso il pollice punta nel verso uscente. Pertanto, denotando con $\hat{u}_z$ il versore del verso entrante, si ha

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{M}_1 & = & +R_1\, T_1\, \hat{u}_z \\ \vec{M}_2 & = & -R_2\, T_2\, \hat{u}_z \end{array} \right. \tag{6}$$

Prendendo come positiva l'accelerazione angolare nel verso orario si ha $\vec{\alpha} = \alpha\, \hat{u}_z$. Pertanto, dalla seconda equazione cardinale della dinamica del corpo rigido, si ha

$$\begin{array}{rcl} \vec{M}_1 + \vec{M}_2 & = & I_p\, \vec{\alpha} \\ & \Downarrow & \\ +R_1\, T_1\, \hat{u}_z - R_2\, T_2\, \hat{u}_z & = & I_p\, \alpha\, \hat{u}_z \\ & \Downarrow & \\ (R_1\, T_1 - R_2\, T_2)\; \hat{u}_z & = & I_p\, \alpha\, \hat{u}_z \end{array} \tag{7}$$

Siccome due vettori sono uguali se e solo se hanno le componenti uguali, si ha

$$\boxed{R_1\, T_1 - R_2\, T_2 = I_p\, \alpha} \tag{8}$$

4. **Relazione tra accelerazione angolare ed accelerazioni lineari**
   Per ciascuno dei due dischi che costituiscono la puleggia la relazione tra accelerazione angolare ed accelerazione lineare è

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 & = & \alpha\, R_1 \\ a_2 & = & \alpha\, R_2 \end{array} \right.} \tag{9}$$

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Passiamo ora a risolvere le equazioni equazioni (2), (4), (8) [con le ulteriori relazioni (9)] ricavate in precedenza:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1 g - T_1 & = & m_1 a_1 \\ T_2 - \mu m_2 g & = & m_2 a_2 \\ R_1\, T_1 - R_2\, T_2 & = & I_p\, \alpha \end{array} \right.$$

si ottiene

$$\begin{cases} T_1 &= m_1(g-a_1) \\ T_2 &= m_2(a_2+\mu g) \\ R_1\,T_1 - R_2\,T_2 &= I_p\,\alpha \end{cases}$$

e sfruttando le relazioni (9), si ottiene

$$\begin{cases} T_1 &= m_1(g-R_1\alpha) \\ T_2 &= m_2(R_2\alpha+\mu g) \\ R_1\,T_1 - R_2\,T_2 &= I_p\,\alpha \end{cases} \tag{10}$$

Da cui si ricava:

1. **Accelerazione angolare**
   Sostituendo le prime due equazioni nella terza, si ottiene

   $$R_1\,m_1(g-R_1\alpha) - R_2\,m_2(R_2\alpha+\mu g) = I_p\,\alpha \tag{11}$$

   Raccogliendo tutti i termini proporzionali ad α

   $$g(R_1\,m_1 - R_2\,m_2\mu) = (I_p + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)\,\alpha \tag{12}$$

   si trova l'accelerazione angolare

   $$\boxed{\alpha = g\,\frac{R_1\,m_1 - R_2\,m_2\mu}{I_p + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}} \tag{13}$$

   e, dalla prima delle (9), l'accelerazione verticale della massa m_1

   $$a_1 = g\,R_1\,\frac{R_1\,m_1 - R_2\,m_2\mu}{I_p + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \tag{14}$$

   Distinguiamo ora i due casi

   (a) **piano liscio ($\mu = 0$)**
   Sostituendo nell'Eq.(13) i valori si ottiene

   $$\begin{aligned} \alpha &= g\,\frac{R_1\,m_1}{I_p + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = \\ &= 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{0.5\mathrm{m}\cdot\,4\cancel{\mathrm{kg}}}{6\,\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}^2 + 4\cancel{\mathrm{kg}}\cdot(0.5\mathrm{m})^2 + 10\cancel{\mathrm{kg}}\cdot(0.2\mathrm{m})^2} = \\ &= 9.81\,\frac{2\cancel{\mathrm{m}}}{(6+1+0.4)\cancel{\mathrm{m}}^2}\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

   ossia

   $$\alpha = 2.65\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(piano liscio)} \tag{15}$$

   (b) **piano scabro ($\mu = 0.25$)**
   Sostituendo nell'Eq.(13) i valori si ottiene

   $$\begin{aligned} \alpha &= g\,\frac{R_1\,m_1 - R_2\,m_2\mu}{I_p + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = \\ &= 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{0.5\mathrm{m}\cdot\,4\cancel{\mathrm{kg}} - 0.2\mathrm{m}\cdot\,10\mathrm{kg}\cdot 0.25}{6\,\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}^2 + 4\cancel{\mathrm{kg}}\cdot(0.5\mathrm{m})^2 + 10\cancel{\mathrm{kg}}\cdot(0.2\mathrm{m})^2} = \\ &= 9.81\,\frac{1.5\cancel{\mathrm{m}}}{(6+1+0.4)\cancel{\mathrm{m}}^2}\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

   ossia

   $$\alpha = 1.99\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(piano scabro)} \tag{16}$$

2. **Velocità del corpo m_1**
Dall'Eq.(9) e dai valori (15) e (16) si trova l'accelerazione verticale a_1 del corpo m_1

$$a_1 \quad = \quad \alpha R_1 = \begin{cases} 2.65\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.5\mathrm{m} = 1.33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} & \text{(piano liscio)} \\ \\ 1.99\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.5\mathrm{m} = 1.00\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} & \text{(piano scabro)} \end{cases} \tag{17}$$

In entrambi i casi a_1 è costante nel tempo. Pertanto il moto di discesa è uniformemente accelerato e possiamo applicare per la massa m_1 la formula del moto uniformemente accelerato

$$\frac{v_f^2 - v_i^2}{2h} = a_1 \tag{18}$$

dove $v_i = 0$ è la velocità iniziale, ottenendo una velocità finale

$$v_f \quad = \quad \sqrt{2\,h\,a_1} \tag{19}$$

ossia

$$v_f \quad = \quad \begin{cases} \sqrt{2\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 1.33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.63\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} & \text{(piano liscio)} \\ \\ \sqrt{2\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 1.00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.41\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} & \text{(piano scabro)} \end{cases} \tag{20}$$

$m_1 = 4\mathrm{kg}$
$m_2 = 10\,\mathrm{kg}$
$R_1 = 0.5\mathrm{m}$
$R_2 = 0.2\mathrm{m}$
$I_p = 6\,\mathrm{kg\,m}^2$
$h = 1\,\mathrm{m}$

3. **le tensioni dei due fili**
Dal sistema (10) si ricava che

$$\begin{cases} T_1 & = & m_1(g - R_1\alpha) \\ T_2 & = & m_2(R_2\alpha + \mu g) \end{cases} \tag{21}$$

Distinguiamo ora i due casi:

(a) **piano liscio ($\mu = 0$)**
Sostituendo il valore (15) in (21) si ottengono le due tensioni

$$\begin{aligned} T_1 &= 4\,\mathrm{kg}\,(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 0.5\,\mathrm{m}\cdot 2.65\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}) = \\ &= 4\cdot 8.48\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\ &= 33.9\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{22}$$

mentre

$$\begin{aligned} T_2 &= 10\,\mathrm{kg}\,(0.2\,\mathrm{m}\cdot 2.65\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}) = \\ &= 10\cdot 0.53\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\ &= 5.30\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{23}$$

(b) **piano scabro ($\mu = 0.25$)**
Sostituendo il valore (16) in (21) si ottengono le due tensioni

$$\begin{aligned}
T_1 &= 4\,\mathrm{kg}\,(9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 0.5\,\mathrm{m}\cdot 1.99\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}) = \\
&= 4 \cdot 8.82\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\
&= 35.3\,\mathrm{N} \qquad (24)
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
T_2 &= 10\,\mathrm{kg}\,(0.2\,\mathrm{m}\cdot 1.99\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} + \frac{1}{4}\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}) = \\
&= 10 \cdot 2.85\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}_{=\mathrm{N}} = \\
&= 28.5\,\mathrm{N} \qquad (25)
\end{aligned}$$