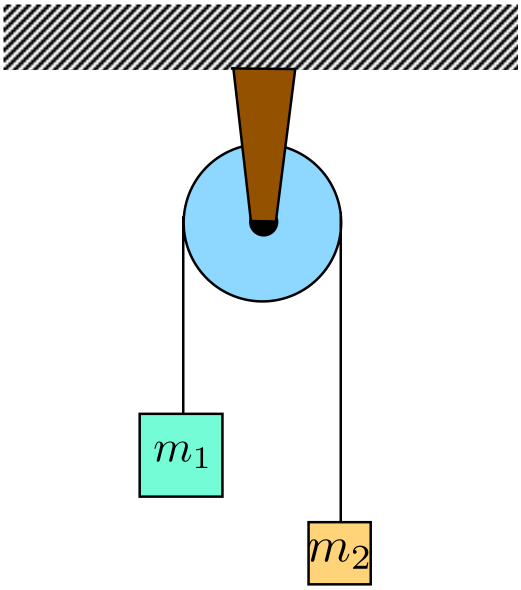
Esercizio (tratto dal Problema 6.7 del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Ad una carrucola di raggio R e massa m sono sospese due masse m_1 e m_2, con $m_1 > m_2$, collegate da un filo. Il momento d'inerzia della carrucola rispetto all'asse passante per il suo centro e ortogonale al piano verticale in cui giace, vale I. Si suppone che il filo non slitti e che non ci sia attrito sull'asse. Calcolare

1. l'accelerazione delle due masse;
2. le tensioni del filo;
3. la reazione sull'asse della carrucola.



SOLUZIONE

Il sistema è costituito da due punti materiali (m_1 e m_2) e da un corpo rigido (carrucola). Scegliamo l'asse y diretto verso l'alto (vedi versori $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$ in figura), e annotiamo le forze che agiscono sui punti materiali e sul disco, come mostrato in figura 1. Dato che $m_1 > m_2$ ci aspettiamo che m_1 scenda e che, contemporaneamente, m_2 risalga.

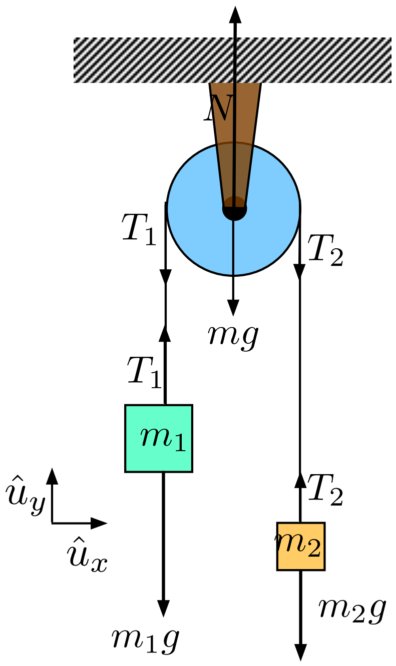


Figure 1:

- **equazione per il corpo m_1 (punto materiale)**

$$-m_1 g + T_1 = m_1 a_1 = -m_1 a \tag{1}$$

dove, dato che m_1 scende, ho denotato $a_1 = -a$ (con $a > 0$).

- **equazione per il corpo m_2 (punto materiale)**

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a_2 = +m_2 a \tag{2}$$

dove, dato che m_2 sale, ho denotato l'accelerazione $a_2 = +a$. Le due accelerazioni sono uguali ed opposte perché il filo è supposto inestensibile.

- **equazioni per la carrucola (corpo rigido)**
Anzitutto elenchiamo tutte le forze che agiscono sulla carrucola:
  - le tensioni T_1 e T_2 dei fili applicati alla carrucola (si noti che ciascuna parte di filo, a destra e a sinistra della carrucola, ha massa nulla, e dunque le tensioni ai capi di ciascuna parte di filo sono uguali ed opposte);
  - la forza peso dovuta alla massa m del disco della carrucola;
  - la reazione vincolare N del perno della carrucola.

  Siccome la carrucola è un corpo rigido, la sua dinamica – a differenza di quella dei punti materiali m_1 e m_2– è descritta da *due* equazioni: una per il moto traslatorio del centro di massa (che in questo caso è fermo), e l'altro per il moto rotatorio attorno al centro di massa.

– <u>*Moto traslatorio del C.M.*</u>
È descritto dall'equazione

$$\underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{=M\vec{a}_{CM}} = \sum \vec{F}^{ext} \tag{3}$$

In questo caso il centro di massa del disco è costantemente fermo ($\vec{a}_{CM} = 0$), e dunque il membro sinistro è nullo.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \vec{F}^{ext} \\ &\Downarrow \\ 0 &= (-T_1 - T_2 - mg + N)\hat{u}_y \end{aligned} \tag{4}$$

$$\rightarrow N = mg + T_1 + T_2 \tag{5}$$

ossia la reazione vincolare N del perno compensa la forza peso e le due tensioni, impedendo al C.M. del disco di muoversi.

– <u>*Moto rotatorio attorno al C.M.*</u>
È descritto dall'equazione

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}^{ext} \tag{6}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare e $\vec{M}$ è il momento delle forze esterne, calcolati rispetto al polo = centro del disco.

∗ Per calcolare $\vec{L}$ osserviamo che la carrucola ruota attorno all'asse di rotazione perpendicolare al foglio (concordemente col fatto che m_1 scende e m_2 sale). Indicando con $\hat{k}$ il versore uscente, abbiamo

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{con } \vec{\omega} = \omega\,\hat{k} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L} = I\omega\,\hat{k} \tag{7}$$

dove $I = I_z$ è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse $\hat{k}$ passante per il centro del disco.

NOTA BENE: Per un corpo rigido che ruota attorno ad un asse (anche fisso) il momento angolare $\vec{L}$ non è necessariamente diretto lungo l'asse $\hat{k}$ di rotazione. In generale si avrebbe $\vec{L} = \omega I\hat{k} + \vec{L}_\perp$, ossia $\vec{L}$ ha sia una componente lungo l'asse $\hat{k}$ di rotazione che una componente $\vec{L}_\perp$ ortogonale ad esso. Tuttavia, in questo particolare caso l'asse di rotazione è anche un asse di simmetria del disco, e dunque siamo sicuri che $\vec{L}_\perp = 0$ e abbiamo potuto scrivere che $\vec{L} = \vec{L}_\parallel = \omega I\hat{k}$.

∗ Calcoliamo ora i momenti $\vec{M}$ delle varie forze, rispetto al polo=centro del disco. Mentre la forza peso mg e la reazione vincolare N del perno danno momento nullo (perché sono applicate proprio al polo), la tensione T_1 applicata al disco dà un momento $\vec{M}_{T_1} = T_1R\hat{k}$ diretto lungo $\hat{k}$, mentre la tensione T_2 applicata al disco dà un momento $\vec{M}_{T_2} = -T_2R\hat{k}$ diretto nel verso entrante (opposto a $\hat{k}$). Quindi il momento totale è

$$\sum \vec{M}^{ext} = \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} = (T_1 - T_2)\,R\,\hat{k} \tag{8}$$

* Inserendo la (7) e la (8) nella (6) otteniamo

$$I\frac{d\omega}{dt}\,\hat{k} = (T_1 - T_2)\,R\,\hat{k} \tag{9}$$

ossia

$$I\alpha = (T_1 - T_2)\,R \qquad\qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{10}$$

– *Condizione di puro rotolamento*
Utilizziamo ora il fatto che il filo non slitta: siccome la carrucola ruota senza strisciare contro il filo, l'accelerazione angolare α e l'accelerazione longitudinale a dei corpi connessi al filo sono legati dalla relazione

$$\alpha = \frac{a}{R} \tag{11}$$

Sostituendo (11) in (10) otteniamo

$$a\frac{I}{R^2} = T_1 - T_2 \tag{12}$$

Quindi le tre equazioni (1), (2) e (12)

$$\begin{cases} -m_1 g + T_1 &= -m_1 a \qquad (I) \\ \\ -m_2 g + T_2 &= m_2 a \qquad (II) \\ \\ T_1 - T_2 &= a\dfrac{I}{R^2} \qquad (III) \end{cases} \tag{13}$$

costituiscono un sistema di tre equazioni in tre incognite a, T_1 e T_2, che ora dobbiamo risolvere.

1. Per determinare l'accelerazione a delle due masse m_1 e m_2, considero le tre equazioni del sistema (13) e faccio

$$-I + II + III \quad \rightarrow \quad (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})\,a \tag{14}$$

da cui ricavo

$$\boxed{a = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}} \tag{15}$$

2. Per determinare le tensioni del filo, dalla prima equazione di (13) ricaviamo ora che

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1(g - a) = \\ &= m_1 g\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}\right) = \\ &= m_1 g\,\frac{2m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \end{aligned} \tag{16}$$

e dunque

$$\boxed{T_1 = m_1 g\,\frac{2m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}} \tag{17}$$

Dalla seconda equazione di (13) ricaviamo ora che

$$
\begin{aligned}
T_2 &= m_2(g+a) = \\
&= m_2 g \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}\right) = \\
&= m_2 g \, \frac{2m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

e dunque

$$
\boxed{T_2 = m_2 g \, \frac{2m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}
\tag{19}
$$

NOTA BENE: Si noti che le due tensioni (17) e (19) ai capi del filo sono diverse ($T_1 \neq T_2$), a causa della presenza del momento d'inerzia I della carrucola. Solo nel limite in cui il momento d'inerzia della carrucola diventa trascurabile ($I \to 0$), ossia in cui la sua struttura interna della carrucola si può assimilare ad un punto (ad es. ad un chiodo), allora si vede che

$$
\left\{
\begin{aligned}
T_1 &\simeq \frac{2m_1 m_2 \, g}{m_1 + m_2} \\
T_2 &\simeq \frac{2m_1 m_2 \, g}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
\right.
\qquad \to \qquad T_1 = T_2
\tag{20}
$$

e si ritrova che le due tensioni sono uguali.

3. La reazione vincolare si calcola allora dall'Eq.(5)

$$
\begin{aligned}
N &= T_1 + T_2 + mg = \\
&= m_1 g \, \frac{2m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} + m_2 g \, \frac{2m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} + mg = \\
&= g \, \frac{m_1(2m_2 + \frac{I}{R^2}) + m_2(2m_1 + \frac{I}{R^2}) + m(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \\
&= g \, \frac{4m_1 m_2 + m(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}(m + m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$