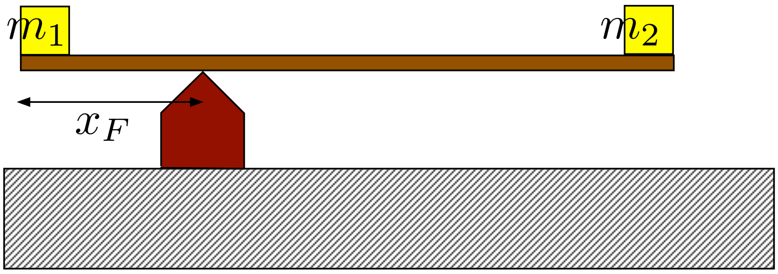
Esercizio (tratto dal problema 6.27 del Mazzoldi)

Un'asta omogenea di lunghezza l e massa m_a, su cui poggiano alle estremità due masse m_1 e m_2, è in equilibrio in un piano orizzontale grazie all'utilizzo di un fulcro posto a distanza x_F dall'estremo sinistro. Calcolare:



1. la reazione vincolare del fulcro;
2. il valore di x_F;
3. la coordinata x_{CM} del centro di massa del sistema.

SOLUZIONE

Dati noti:
m_1;
m_2;
m_a;
l

Le condizioni per la statica è l'annullamento delle forze esterne e dei momenti esterni

$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} & = & 0 \\ \\ \vec{M}^{ext} = \sum_i \vec{M}_i^{ext} & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

- **Forze esterne**
  Le forze esterne che agiscono sul sistema sono:
  -le forze peso (che agiscono su ciascuno dei tre corpi);
  -la reazione vincolare $\vec{R}$ del fulcro (incognita)

  Dalla prima equazione cardinale (1) abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i^{ext} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + m_a\vec{g} + \vec{R} &= 0 \\ &\Downarrow \\ -m_1 g\hat{u}_y - m_2 g\hat{u}_y - m_a g\hat{u}_y + R_x\hat{u}_x + R_y\hat{u}_y &= 0 \\ &\Downarrow \\ R_x\hat{u}_x + (R_y - (m_1+m_2+m_a)g)\hat{u}_y &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

  Il vettore a sinistra dell' "=" è nullo se e solo se sono nulle tutte le sue componenti:

$$\begin{cases} R_x & = & 0 \\ R_y - (m_1+m_2+m_a)g & = & 0 \end{cases} \tag{3}$$

  NOTA BENE: Come si vede che da (2) segue (3) ?
  i) Moltiplico scalarmente la (2) per $\hat{u}_x$

$$\begin{aligned} \hat{u}_x \cdot (R_x\hat{u}_x + (R_y - (m_1+m_2+m_a)g)\hat{u}_y) &= 0 \\ &\Downarrow \\ R_x \underbrace{\hat{u}_x\cdot\hat{u}_x}_{=1} + (R_y - (m_1+m_2+m_a)g)\underbrace{\hat{u}_x\cdot\hat{u}_y}_{=0} &= 0 \\ &\Downarrow \\ R_x &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

  che è la prima delle Eq.(3).
  ii) Moltiplico scalarmente la (2) per $\hat{u}_y$

$$\begin{aligned} \hat{u}_y \cdot (R_x\hat{u}_x + (R_y - (m_1+m_2+m_a)g)\hat{u}_y) &= 0 \\ &\Downarrow \\ R_x \underbrace{\hat{u}_x\cdot\hat{u}_y}_{=0} + (R_y - (m_1+m_2+m_a)g)\underbrace{\hat{u}_x\cdot\hat{u}_y}_{=1} &= 0 \\ &\Downarrow \\ R_y - (m_1+m_2+m_a)g &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

che è la seconda delle Eq.(3).

Dall'Eq.(3) ricaviamo dunque la reazione vincolare $\vec{R}$, le cui componenti sono

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} R_x & = & 0 \\ R_y & = & (m_1 + m_2 + m_a) g \end{array} \right.} \tag{6}$$

che risulta dunque diretta verso l'alto.

- **Momenti esterni**

Per calcolare i momenti esterni dobbiamo scegliere un polo Ω rispetto a cui calcolarli. Le condizioni della statica sono *indipendenti* dalla scelta del polo. Se le condizioni (1) sono valide entrambe con una certa scelta di polo Ω per i momenti, allora sono valide entrambe anche per una qualsiasi altra scelta Ω' di polo.

Ad esempio possiamo scegliere come polo il fulcro F. I momenti sono definiti come

$$\vec{M}_i^{ext} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \tag{7}$$

$\vec{r}_i$ che identifica il punto in cui è applicata la forza $\vec{F}_i^{ext}$, e per calcolare il prodotto vettoriale dobbiamo trasportare parallelamente ciascun vettore forza in modo che la sua coda coincida con la coda del vettore $\vec{r}_i$ (o viceversa), e poi applicare la regola della mano destra per conoscere il verso del prodotto vettoriale [vedi Fig.1]. Indicando

$$\hat{u}_z \quad = \quad \text{versore uscente dal foglio}$$

si ha

$$\vec{M}_1 = \underbrace{\vec{r}_1 \times m_1 \vec{g}}_{\text{uscente}} = x_F m_1 g \, \hat{u}_z \tag{8}$$

$$\vec{M}_2 = \underbrace{\vec{r}_2 \times m_2 \vec{g}}_{\text{entrante}} = -(l - x_F) \, m_2 g \, \hat{u}_z \tag{9}$$

$$\vec{M}_a = \underbrace{\vec{r}_a \times m_a \vec{g}}_{\text{entrante}} = -\left(\frac{l}{2} - x_F\right) m_a g \, \hat{u}_z \tag{10}$$

$$\vec{M}_R = \underbrace{\vec{r}_R}_{=0} \times \vec{R} = 0 \tag{11}$$

Dalla seconda equazione cardinale (1) abbiamo

$$\begin{array}{rcl} \sum_i \vec{M}_i^{ext} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_a + \vec{M}_R & = & 0 \\ & \Downarrow & \\ x_F m_1 g \, \hat{u}_z - (l - x_F) \, m_2 g \, \hat{u}_z - \left(\frac{l}{2} - x_F\right) m_a g \, \hat{u}_z & = & 0 \\ & \Downarrow & \\ \left(x_F m_1 - (l - x_F) \, m_2 - \left(\frac{l}{2} - x_F\right) m_a \right) g \, \hat{u}_z & = & 0 \end{array} \tag{12}$$

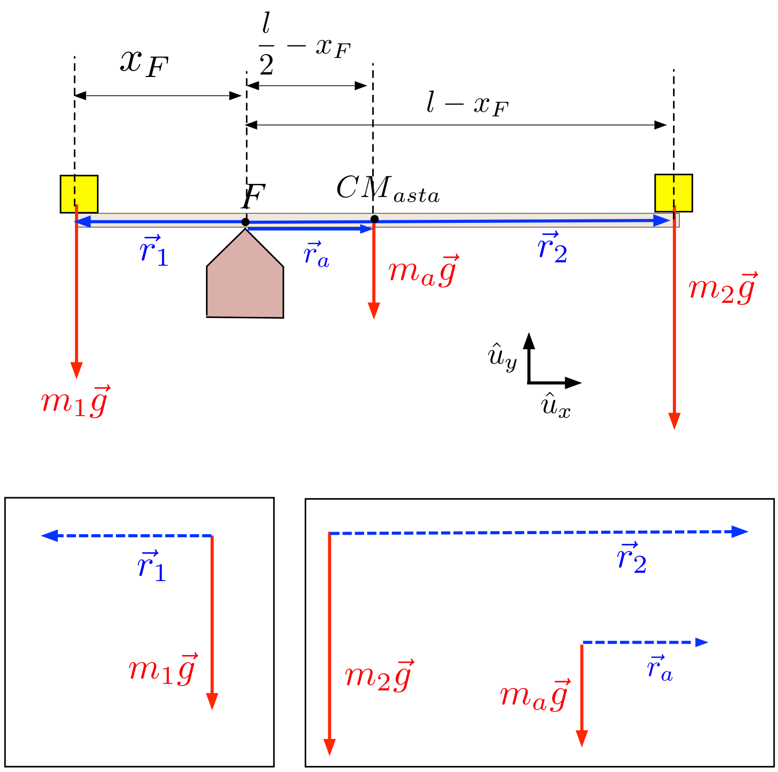


Figure 1: Le forze esterne applicate sul sistema. Per il calcolo dei momenti occorre trasportare parallelamente i vettori forza in modo che abbiano la coda coincidente con i vettori dei punti di applicazione.

Il vettore a sinistra dell' "=" è nullo se e solo se sono nulle tutte le sue componenti (in questo caso ce n'è solo una). Pertanto

$$x_F m_1 - (l - x_F)\, m_2 - \left(\frac{l}{2} - x_F\right) m_a \quad = \quad 0 \tag{13}$$

Raccogliendo tutto ciò che moltiplica x_F otteniamo

$$x_F(m_1 + m_2 + m_a) \quad = \quad (m_2 + \frac{m_a}{2})\, l$$

da cui ricaviamo

$$\boxed{x_F = l\,\frac{m_2 + \frac{m_a}{2}}{m_1 + m_2 + m_a}} \tag{14}$$

- **Centro di massa del sistema**
  Per calcolare il centro di massa dell'intero sistema sfrutto la proprietà distributiva del centro di massa. Se divido il sistema in tre sotto-sistemi (i due punti materiali + l'asta), il centro di massa dell'intero sistema è il centro di massa dei centri di massa. Il centro di massa dei punti materiali è semplicemente la loro posizione, mentre il centro di massa dell'asta (che è essa stesso un sistema continuo di punti materiali) è il centro geometrico dell'asta stessa, in quanto essa è omogenea, e possiamo considerare tutta la massa dell'asta come concentrata sul suo centro di massa. Tutti questi centri giacciono lungo l'asse x, pertanto il centro di massa dell'intero sistema

Fabrizio Dolcini (http://staff.polito.it/fabrizio.dolcini/)
Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino - Esercitazioni di Fisica I

giace anch'esso lungo l'asse x. Prendendo come origine $x = 0$ il fulcro F, abbiamo

$$\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{\sum_i m_i\, x_i}{\sum_i m_i} = \\
&= m_1(-x_F) + m_a\left(\frac{l}{2} - x_F\right) + m_2(l - x_F) = \\
&= -x_F(m_1 + m_2 + m_a) \;+\; (m_2 + \frac{m_a}{2})\, l = \\
&\quad \text{[sostituisco il valore di } x_F \text{ trovato nell'Eq.(14)]} \\
&= -l\, \frac{m_2 + \frac{m_a}{2}}{m_1 + m_2 + m_a}(m_1 + m_2 + m_a) + \;(m_2 + \frac{m_a}{2})\, l = \\
&= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

ossia

$$\boxed{\text{il centro di massa dell'intero sistema è situato proprio sul fulcro } F}$$

Questo risultato non sorprende, dato che la forza peso dell'intero sistema si può immaginare concentrata sul centro di massa. Pertanto, se il centro di massa fosse stato spostato rispetto ad F, la forza peso avrebbe generato un momento non nullo (rispetto al fulcro) e, dato che la reazione vincolare non dà momento rispetto al fulcro, la somma dei momenti nella seconda equazione cardinale (1) non sarebbe stata nulla.