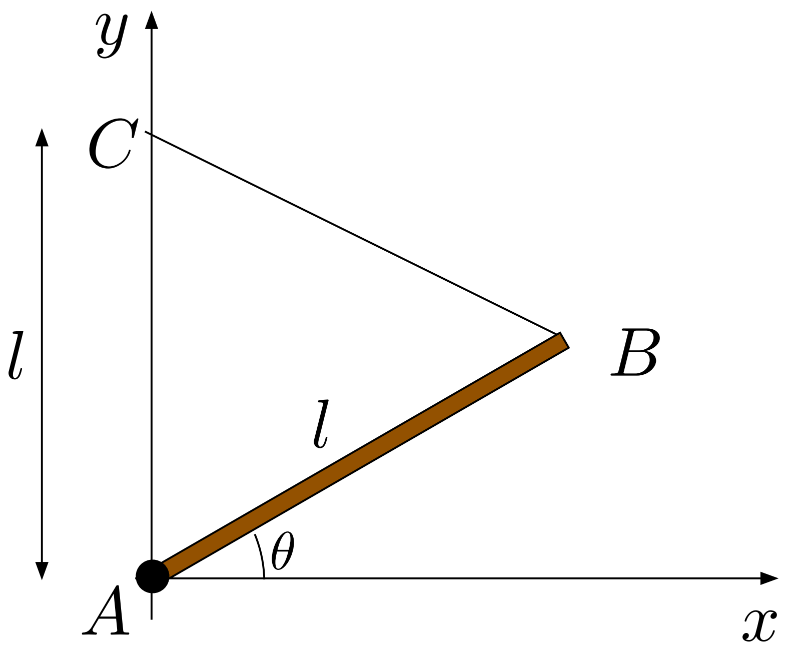
Esercizio (tratto dal problema 7.21 del Mazzoldi 2)

Un ponte levatoio è costituito da una tavola AB di massa $m = 600\,\mathrm{kg}$ lunga $l = 4\,\mathrm{m}$. La tavola è incernierata sul lato A e può essere alzata agendo sul lato B con una fune, tirata dal punto C, posto sulla verticale passante per A e distante l da A. Calcolare:

1. il valore della tensione della fune quando il ponte è in equilibrio ad un angolo $\theta = 30^o$ rispetto all'orizzontale;
2. la reazione vincolare $\vec{R}$ in A in tale situazione.



SOLUZIONE
Dati noti:
$m = 600\,\mathrm{kg}$
$l = 4\,\mathrm{m}$
$\theta = \frac{\pi}{6}$

Il ponte levatoio è un corpo rigido. Affinché rimanga fermo in equilibrio occorre che non sia dotato né di moto traslatorio né di moto rotatorio. Le equazioni cardinali sono dunque

$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} & = & 0 \qquad \text{(nessuna forza esterna netta} \rightarrow \text{nessun moto traslatorio)} \\ \\ \vec{M}^{ext} & = & 0 \qquad \text{(nessun momento esterno netto} \rightarrow \text{nessun moto rotatorio)} \end{cases} \tag{1}$$

Indichiamo on x l'asse orizzontale (versore $\hat{u}_x$), con y l'asse verticale diretto verso l'alto (versore $\hat{u}_y$) e con z l'asse uscente dal foglio (versore $\hat{u}_z$).

1. **Forze**
Le forze esterne che agiscono sul ponte sono:

$$m\vec{g} = -mg\,\hat{u}_y \qquad \text{forza peso} \tag{2}$$
$$\vec{T} = -T\cos\frac{\pi}{6}\hat{u}_x + T\sin\frac{\pi}{6}\,\hat{u}_y \qquad \text{tensione della fune} \tag{3}$$
$$\vec{R} = R_x\,\hat{u}_x + R_y\hat{u}_y \qquad \text{reazione vincolare in A} \tag{4}$$

NOTA BENE: Le reazioni vincolari, così come le tensioni, sono delle incognite da determinarsi! Pertanto *non conosciamo* la direzione del vettore $\vec{R}$. L'unica cosa che sappiamo è che la reazione vincolare è applicata nel punto A. Infatti, qualunque cosa faccia il ponte levatoio, il suo estremo A rimane sempre fisso, e deve dunque esistere una forza ad esso applicata che gli impedisce di seguire il movimento del resto dei punti che costituiscono il ponte.

Dalla prima delle equazioni cardinali (1) abbiamo dunque

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} &= 0 \\ &\Downarrow \\ -mg\,\hat{u}_y - T\cos\frac{\pi}{6}\hat{u}_x + T\sin\frac{\pi}{6}\,\hat{u}_y + R_x\,\hat{u}_x + R_y\hat{u}_y &= 0 \\ &\Downarrow \\ \left(-T\cos\frac{\pi}{6} + R_x\right)\,\hat{u}_x + \left(-mg\, + T\sin\frac{\pi}{6} + R_y\right)\,\hat{u}_y &= 0 \end{aligned}$$

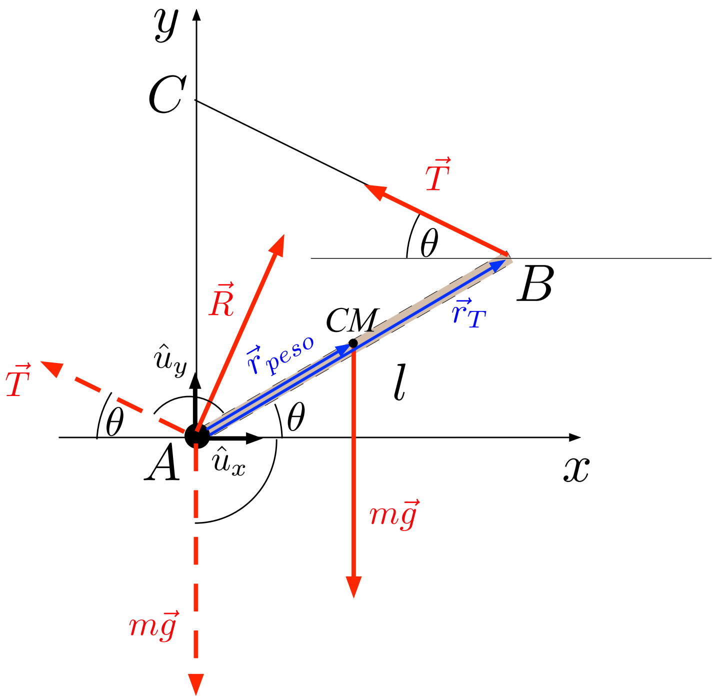
$$\Rightarrow \begin{cases} -T\cos\frac{\pi}{6} + R_x & = & 0 \\ \\ -mg\, + T\sin\frac{\pi}{6} + R_y & = & 0 \end{cases} \tag{5}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} R_x & = & T\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}T \\ \\ R_y & = & mg\, - T\sin\frac{\pi}{6} = mg\, - \frac{T}{2} \end{cases} \tag{6}$$

2. **Momenti**
Dobbiamo anzitutto specificare il polo Ω rispetto a cui valutare i momenti $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ delle varie forze. Scegliamo, ad esempio, il punto A come polo.

IMPORTANTE: Per valutare il momento $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ di una forza $\vec{F}$ occorre ricordare prima di tutto di trasportare parallelamente uno dei due vettori ($\vec{r}$ o $\vec{F}$) in modo da far coincidere le loro code (ad esempio trasporto parallelamente $\vec{F}$ in modo da far coincidere la sua coda con quella del vettore $\vec{r}$ del punto di applicazione). A questo punto (e solo a questo punto), andando con le dita della mano *destra* dal primo vettore che compare nel prodotto $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (ossia $\vec{r}$) al secondo vettore (ossia $\vec{F}$) la direzione del momento $\vec{M}$ è data dal pollice (che dunque può risultare entrante o uscente dal foglio). Ricordiamo che il prodotto vettoriale *non* è commutativo, per cui l'ordine dei fattori è cruciale ($\vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{F} \times \vec{r}$)



Notiamo che la reazione vincolare $\vec{R}$ ha braccio nullo perché è proprio applicata in A, e dunque non genera alcun momento (questa è la ragione per cui scegliere A come polo può risultare vantaggioso). Le uniche forze che applicano un momento sono il peso e la tensione.

I momenti (rispetto al polo A) che agiscono sul ponte sono dunque:

$$\vec{M}_{peso} = \vec{r}_{peso} \times m\vec{g} = -mg\,\frac{l}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\hat{u}_z \qquad \text{momento della forza peso} \tag{7}$$

$$\vec{M}_T = \vec{r}_T \times \vec{T} = T\,l\,\sin(\pi - 2\theta)\,\hat{u}_z \qquad \text{momento della tensione} \tag{8}$$

$$\vec{M}_R = 0 \qquad \text{momento della reazione vincolare in A} \tag{9}$$

dove

$$\hat{u}_z = \text{versore uscente dal foglio}$$

e il vettore $\vec{r}_{peso}$ va dal polo A al centro di massa.

Dalla seconda delle equazioni cardinali (1) abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_{peso} + \vec{M}_T + \vec{M}_R &= 0 \\
&\Downarrow \\
-mg\,\frac{l}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\hat{u}_z \; + T\,l\,\sin(\pi-2\theta)\,\hat{u}_z \; + 0 &= 0 \\
&\Downarrow \\
\left(-mg\,\frac{l}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) + T\,l\,\sin(\pi-2\theta)\right)\,\hat{u}_z &= 0 \\
&\Downarrow \\
-mg\,\frac{l}{2}\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}_{=\cos\theta} + T\,l\,\underbrace{\sin(\pi-2\theta)}_{=\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta} &= 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Semplificando per $l\cos\theta$ otteniamo

$$
T = \frac{mg}{4\sin\theta} = \frac{mg}{2} \tag{11}
$$

Sostituendo i dati, otteniamo

$$
T = \frac{mg}{2} = \frac{600\,\mathrm{kg}\cdot 9.81}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2943\,\mathrm{N} \tag{12}
$$

Per determinare ora la reazione vincolare sostituiamo la tensione (11) nell'espressione (6)

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
R_x &=& \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,mg \\
\\
R_y &=& mg - \frac{mg}{4} = \frac{3}{4}\,mg
\end{array}
\right.
\tag{13}
$$

Pertanto la reazione vincolare forma un angolo di

$$
\phi_R = \arctan\frac{R_y}{R_x} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \tag{14}
$$

con l'orizzontale.
Sostituendo i dati, troviamo

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
R_x &=& \frac{\sqrt{3}}{4}\,mg = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 600\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2549\,\mathrm{N} \\
\\
R_y &=& \frac{3}{4}\,mg = \frac{3}{4}\cdot 600\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4414\,\mathrm{N}
\end{array}
\right.
\tag{15}
$$